

Differentialgleichungen (DGL)

MatheC3 - WS 2022/23

1	DGL erster Ordnung	1
2	DGL-Systeme erster Ordnung	3
3	DGL n -ter Ordnung	4

1 DGL erster Ordnung

1.1 Homogene DGL

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t)$$

$$y_{hom}(t) = \exp\left(\int a(t) dt\right)$$

$$L_{hom} = \{a \cdot y_{hom}(t) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Trennung der Variablen

Allgemeine Form:

$$y'(t) = g(y(t)) \cdot h(t)$$

Vorgehen:

Ohne Anfangswert

Mit Anfangswert

1. $y(t)$ auf eine Seite, t auf die andere Seite bringen:

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t)$$

2. Beide Seiten integrieren und beim Anfangswert $\tau = t$ substituieren:

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int h(t) dt \quad \Bigg| \quad \int_{t_0}^t \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau$$

3. Substitution mit $\eta := y(t)$ (wegen Substitutionsregel $\int g(y(t)) \cdot y'(t) dt = \int g(\eta) d\eta$):

$$\int \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int h(\tau) d\tau \quad \Bigg| \quad \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau$$

4. Ausrechnen, rückeinsetzen und nach $y(t)$ auflösen (+ C bei unbestimmten Integral nicht vergessen).
Hilfreich dabei: Quadratische Ergänzung

1.2 Inhomogene DGL (partikuläre Lösung)

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$$

$$L_{inhom} = \{y_{par}\} + L_{hom}$$

Variation der Konstanten

$$1. \quad c(t) = \int \frac{b(t)}{y_{hom}(t)} dt \quad \Bigg| \quad c(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(\tau)}{y_{hom}(\tau)} d\tau$$

$$2. \quad y_{par}(t) = c(t) \cdot y_{hom}(t)$$

$$3. \quad y_{ges}(t) = y_{par}(t) + a \cdot y_{hom}(t), \quad a \in \mathbb{R}$$

1.3 Substitution

Falls die gegebene DGL keine der beiden oberen Formen hat, kann man den von $y(t)$ abhängigen Teilterm durch $u(t)$ substituieren und eine neue DGL für $u(t)$ aufstellen.

Durch Rücksubstitution erhält man die schlussendliche $y(t)$ -Funktion.

$$\mathbf{1.3.1} \quad y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \quad \Rightarrow \quad u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

$$u'(t) = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t} \quad \rightarrow \quad \text{DGL} \quad \Rightarrow \quad y(t) = u(t) \cdot t$$

$$\mathbf{1.3.2} \quad y'(t) = f(at + by(t) + c) \quad \Rightarrow \quad u(t) := at + by(t) + c$$

$$u'(t) = a + b \cdot f(u(t)) \quad \rightarrow \quad \text{DGL} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{u(t) - at - c}{b}$$

$$\mathbf{1.3.3} \quad y'(t) = f(t) \cdot y(t) + g(t) \cdot y^{(\alpha)}(t), \quad \alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad u(t) := y(t)^{1-\alpha}$$

$$u'(t) = (1 - \alpha)f(t) \cdot u(t) + (1 - \alpha)g(t) \quad \rightarrow \quad (\text{inhomogene}) \text{ DGL}$$

Das ganze ist eine sog. Bernoulli'sche Gleichung

$$\mathbf{1.3.4} \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot t^k \cdot y^{(k)}(t) = 0$$

$$1. \quad u(\ln t) = y(t)$$

Diese Gleichung wird nun solange abgeleitet, bis man die Terme $t^k \cdot y^{(k)}(t)$ durch passende „ $u(t)$ -Terme“ ersetzen kann

$$2. \quad \tau := \ln t \quad \rightarrow \quad u^{(k)}(\tau)$$

$$3. \quad \sum_{k=0}^n \tilde{\alpha}_k \cdot u^{(k)}(t) = 0$$

Das ganze ist eine sog. Euler'sche DGL

2 DGL-Systeme erster Ordnung

2.1 Fundamentalsystem (homogene Lösung)

$$\vec{y}'(t) = A \cdot \vec{y}(t)$$

$$y_{ges} = a_1 \cdot \vec{y}_1(t) + \dots + a_n \cdot \vec{y}_n(t) \mid a_i \in \mathbb{R}$$

$$L_{hom} = \{a_1 \cdot \vec{y}_1(t), \dots, a_n \cdot \vec{y}_n(t) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$FS = \{\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)\}$$

Fundamentalsystem: Eine Basis des Lösungsraumes L_{hom} (quasi L_{hom} ohne a_i)

Fundamentallösungen: Die einzelnen Vektoren des Fundamentalsystems

2.1.1 Matrix A ist eine Diagonalmatrix oder diagonalisierbar

Falls $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ oder diagonalisierbar ist (für jeden Eigenwert algebraische = geometrische Vielfachheit), ist das Fundamentalsystem:

$$\vec{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad \vec{y}_n(t) = e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$$

λ_i = Eigenwerte: $\det(A - \lambda E) = 0$

\vec{v}_i = Eigenvektoren: $(A - \lambda E) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ (bei Diagonalmatrix die Einheitsvektoren)

Umwandlung von einem komplexen in ein reelles Fundamentalsystem

Zu einer komplexen Fundamentallösung $\left(y(t) e^{\lambda t} \cdot \vec{q} = e^{(a+bi)t} \cdot (\vec{r} + \vec{s}i) \right)$ gehören immer zwei konjugiert-komplexe reelle Lösungen:

$$\vec{y}_1(t) = \text{Re}(\vec{y}(t)) = (\vec{r} \cdot \cos(bt) - \vec{s} \cdot \sin(bt)) \cdot e^{at}$$

$$\vec{y}_2(t) = \text{Im}(\vec{y}(t)) = (\vec{s} \cdot \cos(bt) + \vec{r} \cdot \sin(bt)) \cdot e^{at}$$

2.1.2 Matrix A ist nicht diagonalisierbar

Hauptvektor

Zu jedem Eigenwert λ findet man immer genau so viele linear unabhängige Hauptvektoren, wie die algebraische Vielfachheit von λ angibt. D. h. zu jeder Matrix gibt es immer entsprechend viele Hauptvektoren die eine Basis (Fundamentalsystem) bilden.

Eigenvektoren sind Hauptvektoren der Stufe 1, aus diesen lassen sich die weiteren Hauptvektoren berechnen.

Hauptvektoren der Stufe k ($k \geq 2$)

Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Hauptvektor der Stufe k , wenn es einen anderen Hauptvektor \vec{w} der Stufe $k-1$ gibt, so dass:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{v}_k = \vec{w}_{k-1}$$

Fundamentalsystem berechnen

Pro Eigenwert λ wird, mit dem zugehörigen Eigenvektor, eine Kette an Hauptvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ berechnet. Diese ist so lang ist, dass sie eine Basis von A bildet (die Länge entspricht der algebraischen Vielfachheit).

$$\vec{y}_m(t) = e^{\lambda t} \left(\vec{v}_m + t \cdot \vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!} \cdot \vec{v}_{m-2} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \vec{v}_1 \right)$$

Achtung: Der Eigenvektor (\vec{v}_1) steht ganz hinten.

Dies ergibt pro Vektor nur jeweils eine \vec{y}_i -Funktion. Das Fundamentalsystem ist entsprechend $\{\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)\}$. Jeder Eigenwert λ trägt dazu genau so viele Fundamentallösungen bei, wie seine algebraische Vielfachheit ist.

2.2 Inhomogenes DGL-System (partikuläre Lösung)

$$\vec{y}'(t) = A \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

$$L_{inhom} = \{y_{par}\} + L_{hom}$$

Variation der Konstanten

1. Fundamentalmatrix: $W(t) := [\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Matrix aus den Fundamentallösungen)
Wronski-Determinante: $\det(W(t))$ (Wenn $\det(W(t)) \neq 0$ wurde ein Fundamentalsystem gefunden)
2. $W(t)^{-1}$ berechnen $\left((W(t) | E) \xrightarrow{\text{Gauss}} (E | W(t)^{-1}) \right)$
3. $\vec{c}(t) = \int W(t)^{-1} \cdot \vec{b}(t)$
4. $y_{par}(t) = W(t) \cdot \vec{c}(t)$

3 DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t) \cdot y(t) = b(t)$$

3.1 Umwandlung in ein DGL-Sytem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \vec{y}_{neu}(t) &:= \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{y}_{neu}'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} \stackrel{(\text{Dgl.})}{=} \begin{pmatrix} y_{neu,2}(t) \\ y_{neu,3}(t) \\ \vdots \\ y_{neu,n}(t) \\ b(t) - [a_{n-1}y_{neu,n}(t) + \dots + a_0y_{neu,1}(t)] \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{y}_{neu}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}}_{=: \vec{b}(t)} \end{aligned}$$

Charakteristisches Polynom („Aus Ableitungen werden Potenzen“)

$$p(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$$

3.2 Homogene Lösung

Für jeden Eigenwert λ :

$$y_{\lambda 1}(t) = e^{\lambda t}, y_{\lambda 2}(t) = t \cdot e^{\lambda t}, \dots, y_{\lambda n}(t) = t^{r-1} \cdot e^{\lambda t}, \quad r = \text{Vielfachheit der Nullstelle } \lambda$$

Umwandlung von einem komplexen in ein reelles Fundamentalsystem

$$y_1(t) = \text{Re}(y(t)) = e^{at} \cdot \cos(bt)$$

$$y_2(t) = \text{Im}(y(t)) = e^{at} \cdot \sin(bt)$$

3.3 Partikuläre Lösung

3.3.1 Analog zu Variation der Konstanten bei DGL-Systemen (Abschnitt 2.2)

Seien y_1, \dots, y_n n linear unabhängige Lösungen der *homogenen* skalaren Dgl. (die wir gemäß dem vorangegangenen Satz berechnet haben).

Das LGS (*) lautet dann

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Löse dieses LGS, und bilde für jede Komponente $c_i'(t)$ des Lösungsvektors eine Stammfunktion $c_i(t)$.

$$y_{par}(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \cdot \vec{y}_i(t)$$

3.3.2 „Ansatz vom Typ der rechten Seite“

Das Vorgehen ist, dass auf der linken Seite die $y^{(n)}(t)$ -Terme durch einen entsprechenden $y_{par}^{(n)}(t)$ -Term ersetzt werden. Der $y_{par}(t)$ -Term aus der unteren Tabelle muss also noch entsprechend n mal abgeleitet werden.

$$y_{par}(t) =$$

$b(t) = \text{Polynom}$		$b(t) = b \cdot e^{kt}$		$b(t) = e^{kt} \cdot (\text{Polynom})$	
$p(0) \neq 0$	0 ist r -fache Nst von $p(t)$	$p(k) \neq 0$	k ist r -fache Nst von $p(t)$	$p(k) \neq 0$	k ist r -fache Nst von $p(t)$
$\sum_{i=0}^m a_i t^i$	$t^r \cdot \sum_{i=0}^m a_i t^i$	$a \cdot e^{kt}$	$a \cdot e^{kt} \cdot t^r$	$e^{kt} \cdot \sum_{i=0}^m a_i t^i$	$e^{kt} \cdot t^r \cdot \sum_{i=0}^m a_i t^i$
Polynom selben Grades mit a_i als Koeffizienten	mit t^r noch als Vorfaktor			$e^{kt} \cdot \text{Polynom}$ selben Grades mit a_i als Koeffizienten	Stattdessen $e^{kr} \cdot t^r$ am Anfang

($p(t)$ = Charakteristisches Polynom)

Falls die rechte Seite nicht die o.g. Form hat, aber eine Summe aus Termen der obigen Form ist:
Bestimme mit obiger Tabelle für jeden der Summanden separat eine partikuläre Lösung und addiere dann diese partikulären Lösungen.

4 Numerische Verfahren

Wenn die Lösung von Anfangswertproblemen nicht exakt berechnen werden kann.

Sei folgendes Anfangswertproblem gegeben:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

Mit einer Schrittweite $h > 0$

4.1 Euler'sches Polygonzugverfahren, Explizites Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

4.2 Verbessertes Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{h}{2} \cdot f(t_n, y_n)\right)$$