A44)

$$G = (V, E) = (\{v_j\}, \{e_i\})$$

a)

A hat $|E| + 2$ Zeilen und $|V|$ Spalten. b hat $|E| + 2$ Zeilen.
Die Zeilen i mit $1 \leq i \leq |E|$ seien die Beschreibung je einer Kante, es seien:

$$A_{i,j} = \begin{cases} v_j \in e_i : -1 \\ v_j \notin e_i : 0 \end{cases} \qquad f. \quad 1 \leq i \leq |E|$$
$$b_i = -1 \qquad f. \quad 1 \leq i \leq |E|$$

Die Zeilen $i \in \{|E| + 1, |E| + 2\}$ stellen die Übereinstimmung $|U| = \sum_{j=1}^{|V|} v_j = k$ sicher, es seien:

$$A_{|E|+1,j} = 1$$
$$A_{|E|+2,j} = -1$$
$$b_{|E|+1} = k$$
$$b_{|E|+1} = -k$$

Gefordert ist für eine Knotenüberdeckung C:

$$\{v_i, v_j\} \in E \Rightarrow (v_i \in C \vee v_j \in C) \quad \equiv \quad \forall e_i \in E \,.\, |C \cap e_i| \geq 1$$

$-2 \leq (Ax)_i \leq 0$ für $1 \leq i \leq |E|$ ist aufgrund der Konstruktion von $(Ax)_i$ als negative Knotenzahl an einer Kante offensichtlich. $|C \cap e_i| \geq 1$ für jede Kante e_i ist durch diese Konstruktion für eine potentielle Knotenüberdeckung C mit entsprechender Auswahl x an Knoten genau dann erfüllt, wenn $(Ax)_i \leq -1 = b_i$.
A, b sind in $t(|V|, |E|, k) = \mathcal{O}(|V| * |E|)$ konstruierbar.

b)

Es sei $\{\bar{e}_a\} = \bar{E} := \{\{v_i, v_j\} | i \neq j; i, j \in \{1, \ldots, |V|\}\}$ die Menge aller nicht vorhandenen Kanten zwischen Knoten in G.
A hat $\frac{|V|*(|V|-1)}{2} - |E| + 2 = |\bar{E}| + 2$ Zeilen und $|V|$ Spalten. b hat $\frac{|V|*(|V|-1)}{2} - |E| + 2$ Zeilen.
Die Zeilen i mit $1 \leq i \leq \frac{|V|*(|V|-1)}{2} - |E|$ seien die Beschreibung je einer *fehlenden* Kante, es seien:

$$A_{i,j} = \begin{cases} v_j \in \bar{e}_i : 1 \\ v_j \notin \bar{e}_i : 0 \end{cases} \qquad f. \quad 1 \leq i \leq |\bar{E}|$$
$$b_i = 1 \qquad f. \quad 1 \leq i \leq |\bar{E}|$$

Die Zeilen $i \in \{|\bar{E}|+1, |\bar{E}|+2\}$ stellen die Übereinstimmung $|U| = \sum_{j=1}^{|V|} v_j = k$ sicher, es seien:

$$\begin{aligned} A_{|E|+1,j} &= 1 \\ A_{|E|+2,j} &= -1 \\ b_{|E|+1} &= k \\ b_{|E|+1} &= -k \end{aligned}$$

Gefordert ist für eine Clique C:

$$(v_i \in C \wedge v_j \in C) \Rightarrow \{v_i, v_j\} \in E \quad \equiv \quad \{v_i, v_j\} \in \bar{E} \Rightarrow (v_i \notin C \vee v_j \notin C)$$

$0 \leq (Ax)_i \leq 2$ für $1 \leq i \leq |\bar{E}|$ ist aufgrund der Konstruktion von $(Ax)_i$ als Knotenzahl an einer fehlenden Kante offensichtlich. Ist für eine potentielle Clique C mit entsprechender Auswahl x an Knoten eine fehlende Kante $\bar{e}_i$ vorhanden, an der diese Bedingung nicht erfüllt ist, so gilt genau dann $(Ax)_i = 2 \nleq 1 = b_i$.

A, b sind in $t(|V|, |E|, k) = \mathcal{O}\left(|V| * |\bar{E}|\right) = \mathcal{O}\left(|V| * \left(\frac{|V|*(|V|-1)}{2} - |E| + 2\right)\right)$ konstruierbar.