A64)

a)

$L_1 = \{w | w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = \#_b(w)\}$

L_1 besitzt die Pumpeigenschaft für die Pumpzahl $n = 2$.

Jedes Wort z der Sprache mit $|z| \geqslant 2$ enthält, entweder das Teilwort ab oder ba, somit kann man bei der Zerlegung $z = uvwxy$, v und x, jeweils mit a oder b aus diesem Teilwort belegen und w ist das leere Wort, u und y sind der linke und rechte Rest des Wortes.

Nach dieser Methode, lassen sich alle Wörter in L_1 zerlegen und alle Wörter der Art $z' = uv^iwx^iy$ mit $i \geqslant 1$ sind offensichtlich in L_1, da für jedes erhöhen von i sowohl ein a als auch ein b eingefügt werden.

b)

$L_{\text{durch 3}} = \{n | n \in \{0, ..., 9\}^*$ ist die Dezimaldarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl$\}$

$L_{\text{durch 3}}$ besitzt die Pumpeigenschaft für die Pumpzahl $n = 3$.

Dies zeigen wir indem wir beweisen, dass jedes Wort z mit $|z| = 3$ so in $z = uvw$ zerlegt werden kann, dass $(u+v) \mod 3 = 0$, dies Leitet sich daher ab, dass wenn Ziffern deren Summe durch 3 teilbar ist, beim Pumpen an die Zahl angefügt werden, die entstehende Zahl durch 3 teilbar bleibt.

Alle 3 stelligen Wörter aus $\{0, ..., 9\}^*$ setzen sich aus 3 verschiedene Arten von Zeichen k zusammen:

(i) $k \mod 3 = 0$

(ii) $k \mod 3 = 1$

(iii) $k \mod 3 = 2$

Für alle Wörter z, die ein Zeichen der Art (i) enthalten, ist bei der Zerlegung $w = \epsilon$, und entweder v oder x das Zeichen der Art (i), das andere ist ϵ, dadurch bleibt beim Pumpen das Wort durch 3 teilbar.

Für alle Wörter z, die nur Zeichen der Art (ii) enthalten, ist bei der Zerlegung $w = \epsilon$, und entweder v oder x enthhält die Zeichen der Art (ii), das andere ist ϵ, dadurch bleibt beim Pumpen das Wort durch 3 teilbar, da die Summe der Zeichen auf jeden fall durch 3 teilbar ist. Dies gilt analog für Wörter die nur Zeichen der Art (iii) enthalten.

Wörter z, die sowohl aus mindestens einem Zeichen der Art (ii) und aus mindestens einem Zeichen der Art (iii) bestehen, können in $w = \epsilon$, und v=(ii), x=(iii) oder v=(iii), x=(ii), zerlegt werden. Da die Summe aus einem Zeichen der Art (ii) und einem Zeichen der Art (iii) immer durch 3 teilbar ist, bleibt beim pumpen die Zahl durch 3 teilbar.

Da wir nun gezeigt haben, dass jedes dreistellige Wort in $\{0, ..., 9\}^*$ so gepumpt werden kann, dass $(u + v) \mod 3 = 0$, und, da in jedem Wort z_L von $L_{\text{durch 3}}$ mit $z \geqslant 3$ eines dieser Worte vorkommt, haben wir damit gezeigt, dass $L_{\text{durch 3}}$ mit der Pumpzahl $n = 3$ die kontextfreie Pumpeigenschaft besitzt.