BFS - Übungsblatt 11

26. März 2014

A54)

a)

(1)

$L_1 = \{w | w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
Für die Konstante n der kontextfreien Pumpeigenschaft betrachten wir den Fall $\#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w) = n$ anhand des Wortes $h = a^n b^n c^n$.

Wegen $|vwx| \leq n$ werden vwx und damit auch vx bei Aufteilung von h maximal 2 verschiedene Buchstaben enthalten. Da $|vx| > 0$ bleibt die Anzahl der Buchstaben untereinander bei Konstruktion von uv^iwx^iy für $i \neq 1$ nicht gleich, da sich mindestens eine Anzahl ändert, und gleichzeitig mindestens eine Anzahl konstant bleibt. Somit ist das Wort nicht mehr in L_1 enthalten.

$\Rightarrow L_1$ hat nicht die kontextfreie Pumpeigenschaft, da die dritte Bedingung der Definition aus der Vorlesung nicht erfüllt ist.

(2)

$L_2 = \{a^i b^j c^k | i < j < k\}$
Für das Wort h mit $i = n, j = n + 1, k = n + 2$ kann in der Aufteilung $uvwxy$ vx kein b oder c enthalten, da sonst für $i = 0$ eine der beiden Ungleichungen verletzt ist. vx kann jedoch auch kein a enthalten, da sonst für $i = 2$ die linke Ungleichung verletzt ist. Da vx jedoch auch nicht leer sein kann, ist die kontextfreie Pump-Eigenschaft nicht gegeben.

b)

$L_3 = \{I^p | p \text{ ist Primzahl}\}$
Ann: L_3 besitzt Pump-Eigenschaft.
Für eine beliebige Primzahl $p \geq n_L$ gibt es ein entsprechendes $uvwxy = I^p$ mit $|vx| > 1$.
Für $uv^iwx^iy = I^{p+(i-1)|vx|}$ gilt $I^{p+(i-1)|vx|} \in L_3$, somit $p + (i-1)|vx|$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ prim.
Sei $(i - 1) := p$, damit $p + (i - 1)|vx| = p + p|vx| = p * (1 + |vx|)$ mit $1 + |vx| \geq 2$ prim.
Offensichtlicher Widerspruch, daher Annahme falsch.
$\Rightarrow L_3$ hat nicht die kontextfreie Pumpeigenschaft.

A55)

$$L = \{a^k b^n c^m d^{n+m} | n, m \geq 0, k \geq 1\}$$

Antwort: Ja, minimale Wortlänge sei $l = 8$.

Fall 1: $k \geq 4$

Zerlegung: $(u, v, w, x, y) = (a^{k-3}, a, a, a, b^n c^m d^{n+m})$
$|vwx| = |aaa| = 3 \leq 8 = l$
$|v|, |x| = 1 \geq 0$
$k' = k - 2 + 2i \geq 2 \geq 1$
$a^{k-3} a^i a a^i b^n c^m d^{n+m} = a^{k'} b^n c^m d^{n+m} \in L$

Fall 2: $2(n + m) \geq 4$

$\Rightarrow n + m \geq 2$

Fall 2.1: $m = 0$

$\Rightarrow n \geq 2$
Zerlegung: $(u, v, w, x, y) = (a^k b^{n-1}, b, \epsilon, d, d^{n-1})$
$|vwx| = |bd| = 2 \leq 8 = l$
$|v|, |x| = 1 \geq 0$
$n' = n - 1 + i \geq 1 \geq 0$
$a^k b^{n-1} b^i d^i d^{n-1} = a^k b^{n'} d^{n'} \in L$

Fall 2.2: $m \geq 1$

Zerlegung: $(u, v, w, x, y) = (a^k b^n c^{m-1}, c, \epsilon, d, d^{n+m-1})$
$|vwx| = |cd| = 2 \leq 8 = l$
$|v|, |x| = 1 \geq 0$
$m' = m - 1 + i \geq 0$
$a^k b^n c^{m-1} c^i d^i d^{n+m-1} = a^k b^n c^{m'} d^{n+m'} \in L$

A56)

Fall 1: L unendlich

Die Menge der Wörter g mit $|g| < n_L$ ist endlich.
Es gibt $h \in L$ mit $|h| \geq n_L$ und eine Aufteilung $uvwxy$ für h.
Solange $|uwy| \geq n_L$ setze $uvwxy = h := uwy$, nun gilt $|uwy| < n_L$. Es gilt $|vwx| < n_L$.
Daher gilt $|h| = |uvwxy| \leq |uwy| + |vwx| < 2n_L$.
Es folgt: $\exists h \in L \,.\, n_L \leq |h| < 2n_L$.

Fall 2: L endlich

Es gibt kein Wort h mit $|h| \geq n_L$, da sonst $uv^iwx^iy \in L$ und somit L unendlich.
Es folgt: $\nexists h \in L \,.\, n_L \leq |h| < 2n_L$.

Entscheider

Entscheide für alle $h \in L' := \{g | g \in \Sigma^* \wedge n_L \leq |g| < 2n_L\}$, ob sie in L enthalten sind. L' ist endlich, da die Länge der Wörter begrenzt ist, L ist entscheidbar, somit ist dieser Schritt in endlicher Zeit durchführbar.

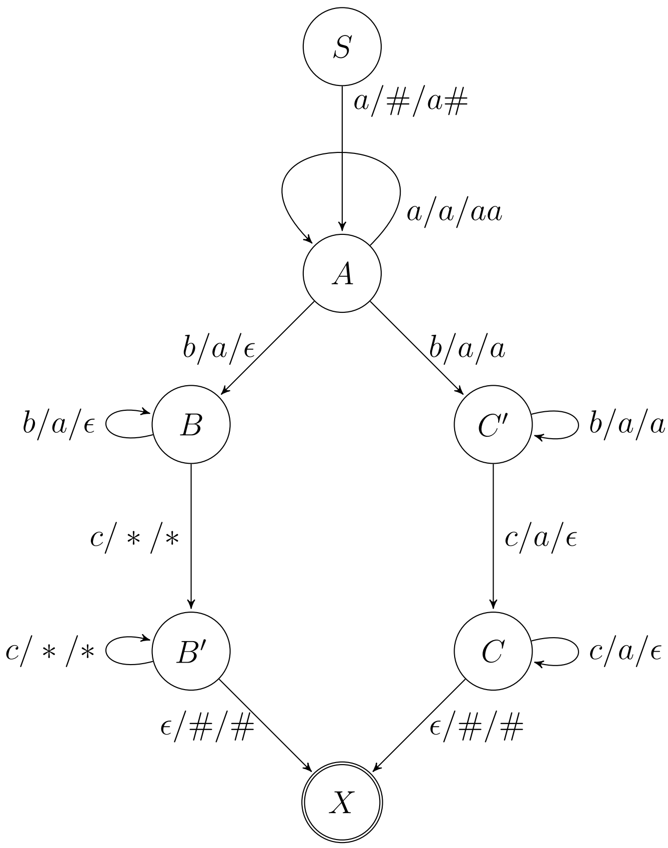
Gibt es ein solches h, so ist die L unendlich, andernfalls endlich.

A57)

Automat

$$\Sigma_\epsilon := (\Sigma \cup \epsilon), \Gamma_\epsilon := (\Gamma \cup \epsilon), \Gamma_\epsilon^* := (\Gamma^* \cup \epsilon)$$

Schreibweise an den Kanten: $b/k/k'$ mit $b \in \Sigma_\epsilon, k \in \Gamma_\epsilon, k' \in \Gamma_\epsilon^*$ entsprechend den Zustandsübergängen des nichtdeterministischen Kellerautomaten. $*$ dient als Platzhalter für ein beliebiges Zeichen aus Γ_ϵ je Zustandsübergang.



Dieser Automat akzeptiert über den linken Pfad genau die Wörter aus der linken Teilmenge und über den rechten Pfad Wörter der rechten Teilmenge; Wörter, die in beiden Mengen enthalten sind, können über beide Pfade akzeptiert werden.

Die Sicherstellung je mindestens eines Vorkommens der Zeichen a, b, c ist durch die Kanten zwischen $S - A - B - B'$ bzw. $S - A - C' - C$ gewährleistet. Die Reihenfolge und Gruppierung der Zeichen wird durch den sequentiellen Ablauf gewahrt.

Die übereinstimmende Anzahl von a^n, b^n / a^n, c^n wird durch das Füllen des Kellers mit $a^n\#$ und das Leeren des Kellers je b im Pfad B, B' / je c im Pfad C', C. Die jeweilige andere Zeichengruppe wird ignoriert, indem das oberste Zeichen des Kellers beim Abarbeiten der c^m / b^m dort erhalten wird.

Der Automat akzeptiert nur dann, wenn der Keller leer ist – das Grundsymbol # ausgenommen – und die Eingabe vollständig gelesen wurde.

Alle Wörter der Menge können akzeptiert werden, da a beliebig oft – mindestens jedoch 1 mal – zum Keller hinzugefügt werden kann, und die Zeichengruppe mit unabhängiger Anzahl unabhängig vom Keller übersprungen werden kann.

Formal:

$$Q = \{S, A, B, B', C, C', F\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{a, \#\}$$

$$Z_0 = \#$$

$$F = \{X\}$$

$$\begin{array}{lccccccccl}
\delta(& S & , & a & , & \# &) & = & \{ & (A, a\#) \quad \} \\
\\
\delta(& A & , & a & , & a &) & = & \{ & (A, aa) \quad \} \\
\\
\delta(& A & , & b & , & a &) & = & \{ & (B, \epsilon), (C', a) \quad \} \\
\delta(& B & , & c & , & a &) & = & \{ & (B', a) \quad \} \\
\delta(& B & , & c & , & \# &) & = & \{ & (B', \#) \quad \} \\
\delta(& C' & , & c & , & a &) & = & \{ & (C, \epsilon) \quad \} \\
\\
\delta(& B & , & b & , & a &) & = & \{ & (B, \epsilon) \quad \} \\
\delta(& C & , & c & , & a &) & = & \{ & (C, \epsilon) \quad \} \\
\\
\delta(& B' & , & c & , & a &) & = & \{ & (B', a) \quad \} \\
\delta(& B' & , & c & , & \# &) & = & \{ & (B', \#) \quad \} \\
\delta(& C' & , & b & , & a &) & = & \{ & (C', a) \quad \} \\
\\
\delta(& B' & , & \epsilon & , & \# &) & = & \{ & (X, \#) \quad \} \\
\delta(& C & , & \epsilon & , & \# &) & = & \{ & (X, \#) \quad \}
\end{array}$$

Test $w_1 = abbc$

$$(S, abbc, \#) \to (A, bbc, a\#) \to (C', bc, a\#) \to (C', c, a\#) \to (C, \epsilon, \#) \to (X, \epsilon, \#)$$

Test $w_2 = abcc$

$$(S, abcc, \#) \to (A, bcc, a\#) \to (B, cc, \#) \to (B', c, \#) \to (B', \epsilon, \#) \to (X, \epsilon, \#)$$