A42)

Es gelten die logischen Operatoren und Rechenregeln der dreiwertigen Logik K_3 von Kleene entsprechend der Namen der Farben, insbesondere:

$$\begin{array}{rcccl} & \neg & \textsc{Egal} & = & \textsc{Egal} \\ \textsc{False} & < & \textsc{Egal} & < & \textsc{True} \\ a' & \vee & b' & = & \max\{a', b'\} \\ a' & \wedge & b' & = & \min\{a', b'\} \\ \textsc{Egal} & \Rightarrow & \textsc{Egal} & = & \textsc{Egal} \end{array}$$

Es seien außerdem:

$$\begin{gathered} 3COL_{(G,c)}(\phi) := \exists c' \, . \, ((G, c') \in \{\text{3-Färbung}\} \wedge \phi[c'/c]) \\ f. \quad G = (V, E) \in \{\text{Graph}\}, \quad c : V \mapsto \{1, 2, 3\} \end{gathered}$$

$$F_3 := \{\textsc{False}, \textsc{Egal}, \textsc{True}\}$$

(a)

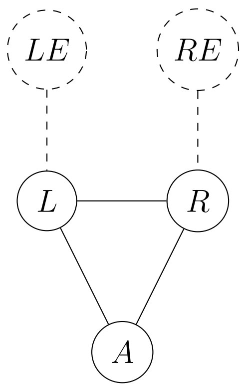
Dann garantiert der linke Graph dass:

$$\forall i \in \{1, .., n\} \, . \, (x_i, \overline{x_i} \in \{\textsc{True}, \textsc{False}\} \wedge \overline{x_i} = \neg x_i)$$

(Die in der Angabe True und False gefärbten Knoten sind dazu nicht notwendig, in jedem Dreieck sind stets 3 verschiedene Farben vorhanden.)

(b)

Eine Aufteilung in 2 identische Netze mit je einem Dreieck und einer weiter verbundenen Kante an 2 der Eckknoten (2 Eingänge, 1 Ausgang) vereinfacht das Modell zum Graph G_3:



Aufgrund der Symmetrie des Graphen sowie der Austauschbarkeit der Farben im Dreifärbungsproblem sind sowohl L/R und LE/RE vertauschbar, als auch die Bezeichner $\textsc{True}, \textsc{Egal}, \textsc{False}$.
Sind $c(LE), c(RE)$ gleich, $c(LE), c(RE) = X$ gewählt, so gilt:

$$c(LE), c(RE) = X \Rightarrow c(L), c(R) \neq X \Rightarrow c(A) = X$$

Sind $c(LE), c(RE)$ verschieden, $Z \neq c(LE) = X \neq c(RE) = Y \neq Z$ gewählt, so gilt:

$$\begin{aligned} &\forall (L^*, R^*, A^*) \in \{(Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y)\}\,. \\ &\qquad 3COL_{(G_3,c)}((c(L), c(R), c(A)) = (L^*, R^*, A^*)) \\ &\forall A^* \in \{X, Y, Z\}\,.\,3COL_{(G_3,c)}(c(A) = A^*) \end{aligned}$$

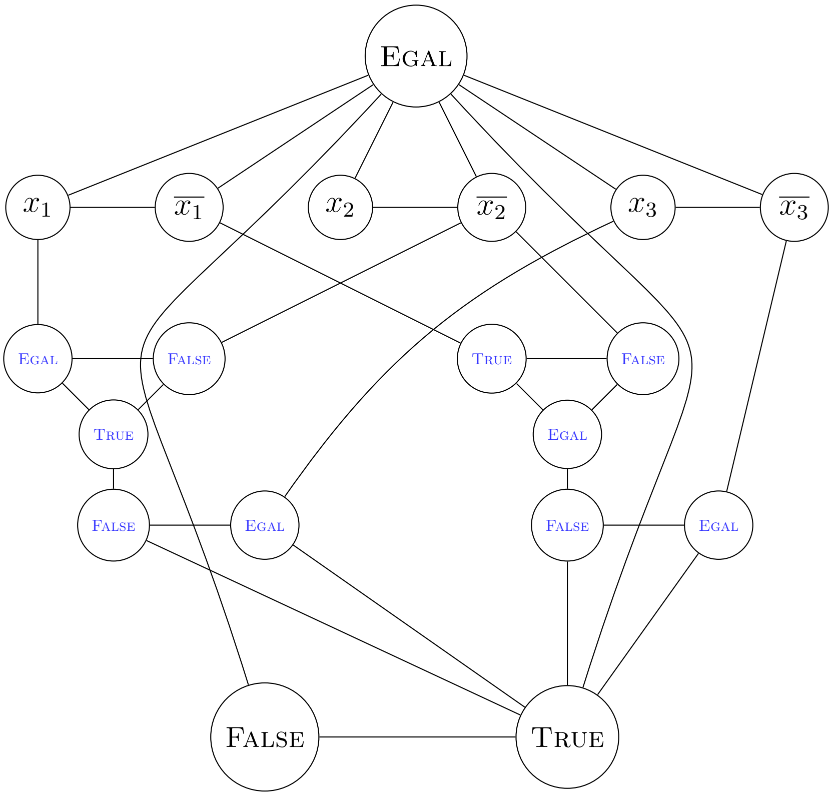
Somit ist für verschiedene Eingaben ein beliebiges Ergebnis, für gleiche Eingaben nur das identische Ergebnis möglich.
Die Knoten des gegebenen Graphen G_b seien von oben nach unten, links nach rechts $e_1, e_2, e_3, d_1, d_2, c_{12}, b_{12}, b_3, a$, die Farbe eines Knoten x sei $x' := c(x)$.
Somit:

$$\begin{aligned} &e_1' = e_2' = e_3' = \textsc{False} \\ &\qquad \Rightarrow c_{12} = \textsc{False} \\ &\qquad \Rightarrow a = \textsc{False} \\ &e_1' = \textsc{True} \vee e_2' = \textsc{True} \vee e_3' = \textsc{True} \\ &\qquad \Rightarrow c_{12} = \textsc{True} \vee \forall c_{12}^* \in F_3\,.\,3COL_{(G_b,c)}(c(c_{12}) = c_{12}^*) \\ &\qquad \Rightarrow a' = \textsc{True} \vee \forall a^* \in F_3\,.\,3COL_{(G_b,c)}(c(a) = a^*) \\ &\qquad \Rightarrow \forall A^* \in F_3\,.\,3COL_{(G_b,c)}(c(a) = a^*) \end{aligned}$$

c)

Wenn der unterste Knoten im rechten Graph $\textsc{True}$ gefärbt wird, dann ist der Graph nur dann 3-färbbar, wenn mindestens einer der Eingänge $e1, e2, e3$ $\textsc{True}$ ist (vorrausgesetzt $e1, e2, e3 \in \{\textsc{True}, \textsc{False}\}$). Dies ist nichts anderes als die Veroderung der Variablen. Nun müssen wir nur noch sicherstellen, dass eine nichtnegierte Variable nicht den gleichen Wert besitzt, wie ihr negiertes Pendant. Dazu verknüpfen wir jeweils die Variablenknoten miteinander und mit einem Knoten der Farbe $\textsc{Egal}$. Danach ziehen wir für jede Klausel, von alle vorkommenden Variablen Kanten zu den drei Eingängen eines rechten Graphenbausteins. Der komplette Graph ist nur dann 3-färbbar, wenn jede Kopie des rechten Graphenbaustein färbbar ist.

[Korrektur] *Annahme der Vorfärbung des* EGAL*-Knotens ungenau. Genannte Austauschbarkeit der Färbung aus b) reicht so nicht aus.*



$$x_1 = \textsc{True}, x_2 = \textsc{False}, x_3 = \textsc{True}$$

d)

Da die Kantenmenge des Graphen keine Kante doppelt enthalten kann, ist die Form der KNF zunächst auf eine KKNF einzuschränken, andernfalls kann die Kantenzahl nicht nur aus den Werten t und n berechnet werden. Da jede KNF in eine KKNF umgewandelt werden kann, seien t, n die entsprechenden Werte der KNF KKNF(Φ). Gegeben ist somit:

- Keine doppelten Klauseln.
- Jede Variable ist in jeder Klausel in negierter oder nicht-negierter Form genau ein mal enthalten, jede Klausel hat somit n Atome.

Für $t = 0$

Es kann ein leerer Graph genutzt werden. Kantenzahl, Knotenzahl und Grad sind somit 0.

Für $t > 0, n = 0$: $t \in \{1\}$

Die leere Klausel ist zu erfüllen, dies ist nicht möglich, als Graph kann eine Clique mit 4 Knoten verwendet werden. Die Kantenzahl ist somit 6, der Grad 3.

Für $t > 0, n = 1$: $t \in \{1, 2\}$

Für Klauseln mit nur einem Atom soll der Knoten des Atoms direkt mit dem Knoten der Farbe $\textsc{False}$ des linken Graphen verbunden werden. Die Knotenzahl ist somit

$3+2=5$, die Kantenzahl $3+2+t$, der Grad 4 (am Knoten der Farbe Egal, bei $t=2$ auch am Knoten der Farbe False).

Für $t>0, n>1$:

Knotenzahl sei N, Kantenzahl E:

Gesamt:

$$N = N_L + N_R, E = E_L + E_R$$

Fest gefärbte Knoten & Variablen:

$$N_L = 3 + 2n, E_L = 3 + 3n$$

Klauseln:

$$N_R = N_T * t, E_R = E_T * t$$

Klausel:

$$N_T = 3 * (n-1) - 1, E_T = 5 * (n-1)$$

[Intention] *Verwendung des kleineren Klausel-Teil-Bausteins mit 2 Eingängen, wie in b) gezeigt, da so keine Eingänge ungenutzt bleiben. Letzter Baustein hat einen Knoten weniger, da* True*-Knoten schon vorhanden, Anzahl Bausteine ist Anzahl Knoten - 1 (vgl. beliebiger Binärbaum, im einfachsten Fall eine Liste).*

[Korrektur] *falsch, rechter Klausel-Baustein hat 5 Knoten und 10 Kanten*

Diese Werte sind unabhängig von Ausgeglichenheit des Binärbaums, da jeder Knoten des Baums (=Dreieck im Graph) die Anzahl der verbleibenden Disjunktionen um 1 reduziert (entspricht Wahl der optionalen Klammerung der Disjunktionen).

Somit:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} N & = & 3 & + & 2n & + & (3 & * & (n & - & 1) & -1) & * & t \\ E & = & 3 & + & 3n & + & (5 & * & (n & - & 1) &) & * & t \\ N & = & 3 & + & 2n & + & & & 3nt & - & 4t & & & \\ E & = & 3 & + & 3n & + & & & 5nt & - & 5t & & & \end{array}$$

Der Grad ist $\max\{ \underbrace{2+2n}_{\text{bei Egal}, > 4}, \underbrace{2+2t}_{\text{bei True}, > 2} \}$.

Die Atome sind mit Grad $2+t$ wie auch die Knoten mit konstantem Grad 2 bei False, 3 in den Dreiecken irrelevant.