A27)

Mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Interpretation des Funktionsparameters als Zahl ergibt sich als äquivalent:

$$\mathbb{Z}: \quad \Big(L \text{ r.a. }\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists M_f \ . \ M_f \text{ berechnet bijektive Funktion } f : \mathbb{N}^+ \mapsto L\Big)$$

mit $g(x) = f(n_x) = f((1x)_2)$

“$\Leftarrow$”

g bijektiv $\Rightarrow$ g surjektiv. Damit kann der Beweis aus Satz 1.23 der Vorlesung angewandt werden.

“$\Rightarrow$”

Wie in der Vorlesung ist ein M_g bzw. M_f zu finden, welches folgende erweiterte Bedingungen erfüllt:

(i) M_f hält für jede Eingabe $n_x \in \mathbb{N}^+$, sofern nicht $n_x > |L|$. (Berechenbarkeit: Einschränkung notwendig, da für $|L| \neq |\mathbb{N}^+|$ keine bijektive Funktion auf dem gesamten Wertebereich definiert werden kann.)
[Korrektur] $n_x > |L|$ *ist kein Problem, da* $|L| = \infty$

(ii) M_f gibt nur Wörter aus L aus. (Korrektheit)

(iii) M_f kann jedes Wort aus L ausgeben. (Surjektivität)

(iv) M_f gibt kein Wort mehrfach aus. (Injektivität)

Die folgende Implementierung von M_f basiert auf der 2D Turingmaschine zur rekursiven Aufzählung, die Simulation einer 1-Band TM je Zeile wird daher nicht weiter beschrieben.

M_f:

1) Die Eingabe n_x sei in Zeile -1 gespeichert.
2) Lege in Zeile 0 (auf 2 Spuren) zwei Zähler $c_M = 1, c_H = 1$ an. c_M zählt dabei die bereits gestarteten Maschinen, c_H die gestarteten und gehaltenen Maschinen.
3) Lege in Zeile c_M eine neue Simulation M_a von M_L mit Eingabe $bin(a)$ und $a = c_M$ an.
4) Iteriere über die vorhandenenen $(M_a)_{1 \leq a \leq c_M}$:
   a) Falls M_a zuvor gehalten hat: Ignoriere M_a
   b) Führe einen Schritt von M_a aus und halte.
   c) Falls M_a gehalten hat und $c_H = n_x$: Gebe $f(n_x) = bin(a)$ aus.
   d) Falls M_a gehalten hat: Inkrementiere c_H
5) Inkrementiere c_M.

6) Gehe zu 3).

Die obigen Bedingungen sind gegeben, da:

(i) M_f hält, sobald n_x M_a gehalten sind. Falls $n_x \leq |L|$, so ist aufgrund der Konzeption als rekursiver Aufzähler gegeben, dass n_x M_a halten werden.

(ii) M_f hält nur mit einer Ausgabe, welche von M_L akzeptiert wurde.

(iii) Jede M_a die hält wird durch c_H nummeriert, daher gibt es für jedes $y \in L$ ein $f(n_x) = y$.

(iv) Da jede M_a nach dem Zeitpunkt ihres Haltens durch c_H eindeutig nummeriert wurde, kann kein $bin(a)$ für mehrere $n_x = c_H$ ausgegeben werden.

q.e.d.