A47)

Zur vereinfachten Darstellung wird folgendes analoges Problem betrachtet:

$$\begin{aligned}
G' &= (V', \Sigma', P', S) \\
V' &= \{S, X, A, D\} \\
\Sigma' &= \{Y\} \\
P' &= \{S \to DXD, DX \to DA, AX \to XXA, AD \to XXD, X \to Y, D \to \epsilon\} \\
L(G') &= L'
\end{aligned}$$

Alle über Produktionen aus dem Startsymbol erzeugbaren Wörter aus $(V' \cup \Sigma')^*$ sind der Form $S \mid [D]\ \{A|X|Y\}\ [D]$ (EBNF), da

- S nur zu DXD umgeformt werden kann und nicht produziert wird,
- D nur entfernt, aus S am Anfang und Ende eines Wortes erzeugt oder in Produktionen der Form $D\alpha \to D\beta$, $\alpha D \to \beta D$ am Anfang bzw. Ende erhalten werden kann.

Es seien die Funktionen $g : Q_g \to \mathbb{N}^+, f : Q_f \to \mathbb{N}_0$ mit $Q_g \subseteq \{DSAXY\}^*, Q_f = \{AXY\}^*$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
g(\alpha) &= f(\alpha[DXD/S][\epsilon/D]) \\
f(\epsilon) &= 0 \\
f(X\alpha) &= 1 + f(\alpha) \\
f(Y\alpha) &= 1 + f(\alpha) \\
f(A\alpha) &= 2 * (1 + f(\alpha))
\end{aligned}$$

Damit sind

$$\begin{aligned}
g(S) &= f(X) && = 1 \\
g(DX^nD) &= f(X^n) && = n \\
g(DY^nD) &= f(Y^n) && = n \\
g(Y^n) &= f(Y^n) && = n
\end{aligned}$$

Für die Produktionen gilt:

$$\begin{aligned}
& g(S) = f(X) && && = g(DXD) \\
& 2g(DX\alpha) = 2 * (1 + f(\alpha)) && && = g(DA\alpha) \\
& f(A) = 2 * (1 + 0) && = \quad 1 + (1 + (0)) && = f(XX) \\
\Rightarrow \quad & g(\alpha AD) = g(\alpha XXD) && && \\
& f(AX\alpha) = 2 * (1 + (1 + f(\alpha))) && = \quad 2 + 2 * (1 + f(\alpha)) && = f(XXA\alpha) \\
\Rightarrow \quad & g(\alpha AX\beta) = g(\alpha XXA\beta) && && \\
& f(X\alpha) = 1 + f(\alpha) && && = f(Y\alpha) \\
\Rightarrow \quad & g(\alpha X\beta) = g(\alpha Y\beta) && &&
\end{aligned}$$

Somit kann durch die Anwendung einer Produktion der Wert von $g(\chi)$ nur beibehalten oder verdoppelt werden.

Da Y das einzige Terminalsymbol ist gilt $\forall \chi \in L' \,.\, \chi = Y^n$.

Da $n = g(\chi) \in \{1, g(\chi'), 2g(\chi')\}$ (χ' sei beliebiges produzierbares Wort), ist $n = g(\chi) = 2^k$.

[Korrektur] χ, χ' *beliebig? Was ist die Aussage über score g?*

Für $k = 0$ folgt $n = 1$, dies ist für das Startsymbol gegeben, für beliebige $k > 0$ baue χ mit $n = 2^k$ mittels Produktionen wie folgt:

1. $S \to DXD$
2. Wiederhole k mal: $DX^{2^i}D \xrightarrow{*} DX^{2^{i+1}}D$ $\quad \Rightarrow DX^{2^0}D \xrightarrow{*} DX^{2^k}D$
3. $\quad DX \to DA$ $\quad \Rightarrow DX^{2^i}D \xrightarrow{*} DAX^{2^i-1}AD$
4. $\quad$ Wiederhole so oft wie möglich: $\quad \Rightarrow DAX^{2^i-1}D \xrightarrow{*} DX^{2^{i+1}-2}AD$
5. $\quad\quad AX \to XXA$
6. $\quad AD \to XXD$ $\quad \Rightarrow DX^{2^{i+1}-2}AD \xrightarrow{*} DX^{2^{i+1}}D$
7. Wiederhole so oft wie möglich: $\quad \Rightarrow DX^nD \xrightarrow{*} X^n$
8. $\quad D \to \epsilon$
9. Wiederhole so oft wie möglich: $\quad \Rightarrow X^n \xrightarrow{*} Y^n$
10. $\quad X \to Y$