A37)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Unabhängige Menge: Eine Teilmenge $U \subseteq V$ der Knotenmenge heißt unabhängige Menge (engl.: independent set), wenn es in der Kantenmenge E keine Kanten aus U gibt. Formal: $\forall u, v \in U : \{u, v\} \notin E$.

Clique: Eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knotenmenge heißt *Clique*, wenn gilt: $\forall\{u, v\} \subseteq C, u \neq v : \{u, v\} \in E$.

Komplementgraph: Der Komplementgraph entsteht aus G, indem man alle in G vorhandenen Kanten löscht und die in G fehlenden Kanten hinzufügt. Formal können wir $\bar{G}$ so beschreiben: $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \{\{u, v\}|u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$.

a)

Bei einer unabhängige Menge eines ungerichteten Graphen G besitzt jeder Knoten der unabhängige Menge keine einzige Kante zu einem anderen Knoten der unabhängige Menge. Wenn man vom ungerichteten Graphen G nun den Komplementgraphen $\bar{G}$ bildet, werden alle vorhandenen Kanten gelöscht und zwischen den unverbundenen Knoten von G werden Kanten eingefügt. Da es bei einer unabhängigen Menge keine Kanten zwischen den Knoten gibt, werden nun von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten der unabhängigen Menge Kanten eingefügt. Dadurch ensteht eine Clique, also eine Menge von Knoten, bei der jeder Knoten mit jedem Knoten verbunden ist.

b)

Gegeben: Graph G mit Knotenmenge V und Kantenmenge E, $G = (V, E)$ und k

Gesucht: Algorithmus, der entscheidet, ob eine Clique C im Graphen existiert mit $|C| = k$

1. Erstelle aus G den Komplementgraphen $\bar{G}$

    Erstelle eine Menge $A = \{\{u, v\}|u, v \in V, u \neq v\}$. Entferne aus A alle Elemente von E.

    Komplementgraph $\bar{G} : \bar{G} = (V, A)$

2. Teste mit M_{ent_IS}, ob $\bar{G}$ eine unabhängige Menge der Größe k besitzt und somit ob G eine Clique der Größe k besitzt

Der Algorithmus hat die Laufzeit $t(n) = \mathcal{O}(n^2) + t_{M_{ent\_IS}}(n)$.