A67)

a)

Zu zeigen:

1. L hat kontextfreie Pumpeigenschaft
2. L ist nicht kontextfrei

1.)

a) $w \in \{a,b,c\}^*$**:** Reguläre, damit auch kontextfreie Grammatik: $S \to aS|bS|cS|a|b|c|\epsilon$, somit kontextfreie Pumpeigenschaft für $|w| \geqslant p_a$ gegeben.

b) $w \in \{☺^i a^n b^n c^n \mid i \geqslant 1, n \geqslant 1\}$**:** Zerlegung sei $uvwxy$, $u = v = w = \epsilon$, $x = ☺$, $y = ☺^{i-1} a^n b^n c^n$. Für x^0 und $i = 1$ ist $a^n b^n c^n \in \{a,b,c\}^*$, für x^j; $j \geqslant 1, i \geqslant 1$ oder $j \geqslant 0, i \geqslant 2$ ist $☺^{j+i-1} a^n b^n c^n \in \{☺^i a^n b^n c^n \mid i \geqslant 1, n \geqslant 1\}$, somit ist kontextfreie Pumpeigenschaft für $|w| \geqslant p_b$ gegeben.

Pumpzahl: $p := \max\{p_a, p_b\}$

2.)

Sei

$$L' := \{☺ a^x b^y c^z \mid x, y, z \geqslant 1\}$$

L' ist regulär. ($S \to ☺A, A \to aA \mid aB, B \to bB \mid bC, C \to cC \mid c$)
Nach A66 ist $L \cap L' = \{☺ a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$ kontextfrei.
Für die kontextfreie Pumpzahl p und das Wort $☺ a^p b^p c^p$ ist die kontextfreie Pumpeigenschaft verletzt, Beweis analog zu A54(a)(1). (Zerlegung $uvwxy$, vx enthält maximal 2 aus 3 von a, b, c, daher für veränderte Multiplizitäten von v/x nicht mehr identische Anzahlen)

b)

Sei

$$L' := \{0^a 1^b 0^c 1^d \mid a, b, c, d \geqslant 1\}$$

L' ist regulär. ($S \to 0S \mid 0T, T \to 1T \mid 1U, U \to 0U \mid 0V, V \to 1V \mid 1$)
Nach A66 ist $L \cap L' = \{0^a 1^b 0^a 1^b \mid a, b \geqslant 1\}$ kontextfrei.
Der Beweis der Nicht-Kontextfreiheit von $L \cap L'$ kann für die Pumpzahl p und das Wort $0^p 1^p 0^p 1^p$ analog zu A65 geführt werden, es können maximal 2 benachbarte Gruppen aus

1en und 0en gepumpt werden, die zweite Gruppe eines in vx vorkommenden Zeichens bleibt in der Anzahl unverändert.

Der daraus folgende Widerspruch zeigt, dass L nicht kontextfrei sein kann.