A41)

a)

$$G = (V, E) = (\{v_j\}, \{e_i\})$$

$$ZZ : \text{IS} \leq_p \text{BP}$$

$f(x) = \langle A, b \rangle$:

- falls $x = \langle G, k \rangle$:
  A habe $|E| + 2$ Zeilen und $|V|$ Spalten, b habe $|E| + 2$ Zeilen.
  Die Zeilen i mit $1 \leq i \leq |E|$ seien die Beschreibung je einer Kante, es seien:

  $$A_{i,j} = \begin{cases} v_j \in e_i : 1 \\ v_j \notin e_i : 0 \end{cases} \qquad f. \quad 1 \leq i \leq |E|$$
  $$b_i = 1 \qquad f. \quad 1 \leq i \leq |E|$$

  Die Zeilen $i \in \{|E| + 1, |E| + 2\}$ stellen die Übereinstimmung $|U| = \sum_{j=1}^{|V|} v_j = k$ sicher, es seien:

  $$A_{|E|+1,j} = 1$$
  $$A_{|E|+2,j} = -1$$
  $$b_{|E|+1} = k$$
  $$b_{|E|+1} = -k$$

  A, b sind in $t(|V|, |E|, k) = \mathcal{O}(|V| * |E|)$ konstruierbar.
- sonst: $\langle A, b \rangle = \langle (0), (-1) \rangle$ $(\mathcal{O}(1))$

$\langle G, k \rangle = a \in \text{IS} \Rightarrow f(\langle G, k \rangle) \in \text{BP}$:

Da $\langle G, k \rangle = a \in \text{IS}$ existiert IS U mit $|U| = k$, $x_j = 1 :\equiv v_j \in U$.
Für $1 \leq i \leq |E|$ gilt: $(Ax)_i \leq 1 = b_i$, da $(Ax)_i = |\{v_j | v_j \in e_i \wedge v_j \in U\}|$, andernfalls wäre U kein IS.
Für $i = |E| + 1$ gilt: $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{|V|}(A_{i,j} x_i) = \sum_{j=1}^{|V|}(x_i) = k \leq k = b_i$.
Für $i = |E| + 2$ gilt: $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{|V|}(A_{i,j} x_i) = \sum_{j=1}^{|V|}(-x_i) = -k \leq -k = b_i$.

$\langle G, k \rangle = a \in \text{IS} \Leftarrow f(\langle G, k \rangle) \in \text{BP}$:

Da $\langle A, b \rangle \in \text{BP}$ existiert x mit $Ax \leq b$, $x_j = 1 \equiv: v_j \in U$.
Da $(Ax)_{|E|+1} \sum_{j=1}^{|V|}(x_i) \leq k$ und $(Ax)_{|E|+2} = \sum_{j=1}^{|V|}(-x_i) \leq -k \equiv \sum_{j=1}^{|V|}(x_i) \geq k$ gilt $\sum_{j=1}^{|V|}(x_i) = k$, somit $|U| = k$.
Da für $1 \leq i \leq |E| : (Ax)_i = |\{v_j | v_j \in e_i \wedge v_j \in U\}| \leq 1$, gibt es keine Kante in G mit beiden Knoten in U, daher ist $\langle G, k \rangle \in \text{IS}$ mit U als IS.

$\langle G, k \rangle \neq a \notin \text{IS} \Rightarrow \langle (0), (-1) \rangle \notin \text{BP}$:

$(0)(x_1) = (0) \not\leq (-1)$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$