Mathematik für Ingenieure C4 SoSe 2020

Klausur Teil 2 20. August 2020

Dr. W. Rathmann

Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2–4 den kompletten Lösungsweg in nachvollziehbarer Weise an. Schreiben Sie auch Nebenrechnungen mit auf. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Konstruieren Sie eine irreduzible und aperiodische homogene Markow-Kette bestehend aus zwei Knoten.

a) (2 Punkte) Zeichnen Sie den Graphen und geben Sie die Übergangsmatrix P an.

b) (2 Punkte) Begründen Sie, dass die Übergangsmatrix aus a) eine (zeilen)stochastische Matrix ist und dass die homogene Markow-Kette irreduzibel ist.

Ersatzlösung: Falls Sie in a) keine Lösung haben, verwenden Sie $P_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

c) (1 Punkt) Begründen Sie, warum diese homogene Markow-Kette für jeden Anfangszustand gegen die Gleichgewichtsverteilung π konvergiert.

d) (3 Punkte) Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung der von Ihnen konstruierten Markow-Kette.
Verwenden Sie ggf. die Ersatzlösung aus b).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y, deren gemeinsamer Dichte $f^{(X,Y)}$ durch den Ausdruck

$$f^{(X,Y)}(x,y) = -c\frac{x}{y^2} \cdot 1_{(0,1)}(x) \cdot 1_{\left(\frac{2}{3},2\right)}(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R},$$

gegeben sei.

a) (1 Punkt) Zeichnen Sie den Träger von $f^{(X,Y)}$.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $f^{(X,Y)}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Randdichten f^Y und f^X.

d) (1 Punkt) Begründen Sie, ob X und Y stochastisch unabhängig sind oder nicht.

e) (1 Punkt) Stellen Sie das Integral zur Berechnung von $P(X + Y \leqslant 2)$ auf. (Nicht lösen!)

Aufgabe 4 (9 Punkte)

a) (4 Punkte) Eine faire Münze mit den Seiten 0 (Null) und 1 (Eins) werde viermal geworfen und die gezeigten Werte werden aufsummiert. Die Würfe sind stochastisch unabhängig. Die Zufallsvariable W beschreibe dieses wiederholte Werfen. Bestimmen Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell und geben Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}[W]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[W]$ an.

b) (5 Punkte) Das oben beschriebene Spiel wird nun 100 mal wiederholt. S_{100} beschreibt die (kumulierte) Summe aller Spielstände. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(S_{100} > 228)$. Falls Sie Sätze aus der Stochastik anwenden, benennen Sie diese und begründen Sie die Anwendbarkeit.