UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG, DEPARTMENT MATHEMATIK

Mathematik für Ingenieure C 4, 2. April 2015, 11:00–12:30 Uhr
Dr. W. Rathmann
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.
Alle schriftlichen Hilfsmittel sind zugelassen.

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markow-Kette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & a & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & b & b & \frac{1}{3} \\ 0 & ba & 2b & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Parameter a und b und zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

b) (1 Punkt) Ist der Graph irreduzibel?

c) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

a) (5 Punkte) Gegeben sei die Ordnungsstatistik einer Stichprobe

$$\mathbf{x}_{[]} = (\underset{1}{-3}, \underset{2}{-1}, \underset{3}{-1}, \underset{4}{-1}, \underset{5}{0}, \underset{6}{0}, \underset{7}{1}, \underset{8}{1}, \underset{9}{2}, \underset{10}{3})$$

mit $\sum x_{[i]}^2 = 27$. Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$, den Median $\tilde{x}$, die Quantile $u_{25\%}$ und $u_{75\%}$ sowie die empirische Varianz $s_{\mathbf{x}}^2$. Skizzieren Sie den zugehörigen (einfachen) Boxplot.

b) (5 Punkte) Von einer Stichprobe $\mathbf{y}$ einer normalverteilten Grundgesamtheit Y sei der Umfang $n = 25$, $\bar{y} = 2$ und die Varianz $\sigma^2 = 9$ bekannt. Welche Schätzfunktion $\hat{\Theta}$ wählen Sie zum Schätzen des Erwartungswertes $E(Y)$?
Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert $\hat{\Theta} = \mu$ zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.1$
Quantile einiger Verteilungen: $z_{0,95} = 1,64$, $z_{0.975} = 1,96$, $t_{0,95;15} = 1,75$, $t_{0,975;15} = 2,13$, $t_{0,95;16} = 1,75$, $t_{0,975;16} = 2,12$.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Von einem zweitstufigen gekoppelten Modell ist bekannt, dass für die erste Stufe $X_1 \sim R_{(0,2)}$ gilt. Die gemeinsame Dichte $f^{(X_1,X_2)}$ ist gegeben durch

$$f^{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{1}{4-2x_1}, & \text{für } x_1 \in (0,2),\ x_2 \in (x_1, 2), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Menge $M \in \mathbb{R}^2$ auf der $f^{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) > 0$ gilt (einschließlich deren Rand).

b) (5 Punkte) Überprüfen Sie, ob $f^{(X_1,X_2)}$ die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt.

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Randdichte f^{X_1} und die Übergangsdichte f_2^1.

d) (1 Punkt) Interpretieren Sie die Übergangsdichte f_2^1.

Hinweis: Falls benötigt, darf die Eigenschaft $\int_0^2 \ln\left(\frac{2}{2-x}\right) dx = 2$ verwendet werden.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Ein fairer Tetraeder wird einmal geworfen und danach wird ein fairer Würfel viermal nacheinander geworfen. Die Resultate seien T_N, X_1, X_2, X_3, X_4, wobei $T_N \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $X_i \in \{1, \ldots, 6\}$ gilt. Anschließend wird die Summe

$$Z = X_1 + \cdots + X_{T_N}$$

gebildet.

a) (3 Punkte) Geben Sie für den Wurf des Tetraeders ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell an.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie Z für die Realisierung
$$(t_N, x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 6, 5, 4, 6).$$

c) (6 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen Z.