FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

Einführung in die Astronomie I

Wintersemester 2013/2014
Beispielklausur – Musterlösung

Allgemeine Regeln

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt *eine Stunde* (60 Minuten).
- Außer eines Taschenrechners sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- *Beide Fragen sind zu bearbeiten.*

Nützliche Konstanten

Astronomische Einheit	$1\,\mathrm{AU} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$
Jahreslänge	$1\,\mathrm{Jahr} = 365.25\,\mathrm{Tage}$
Tageslänge	$1\,\mathrm{Tag} = 86400\,\mathrm{s}$
Stefan-Boltzmann Konstante	$\sigma_{\mathrm{SB}} = 5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Sonnenmasse	$M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Erdmasse	$M_{\oplus} = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 300000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

Frage 1: *Sonnensystem*

a) Komet Wild 2 hat eine Perihelentfernung von 1.583 AU

i. Die Exzentrizität der Bahn ist $e = 0.540$. Berechnen Sie die große und kleine Halbachsen der Bahn.

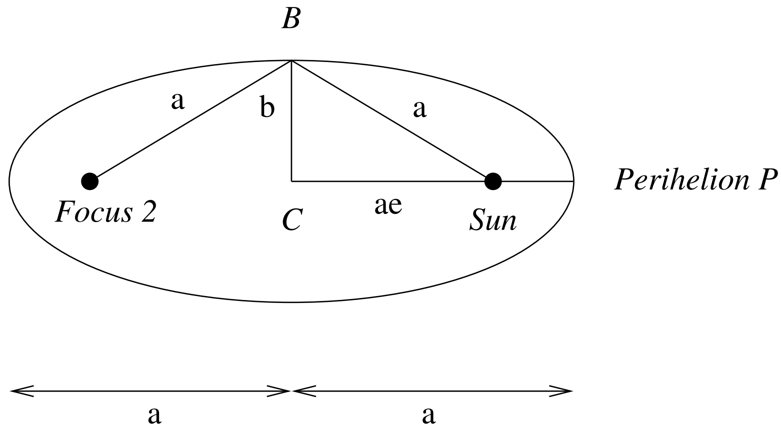
Lösung: Die Perihelentfernung ist

$$d_{\mathrm{per}} = a(1-e)$$

so daß die große Halbachse gegeben ist als

$$a = d/(1-e) = 3.441\,\mathrm{AU}$$

Die Formel für die kleine Halbachse kann aus der Definition einer Ellipse erhalten werden. Da in einer Ellipse die Summe der Entfernungen von beiden Brennpunkten zu einem Punkt auf der Ellipse gleich $2a$ ist, gilt die folgende Abbildung:



Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck C–Sonne–B gilt dann

$$b = a\sqrt{1-e^2} = 2.87\,\mathrm{AU}$$

ii. Bestimmen Sie die Bahnperiode des Kometen.

Lösung: Die Bahnperiode folgt aus dem 3. Kepler'schen Gesetz. Für das Sonnensystem ist dieses .

$$\frac{P^2_{\mathrm{Earth}}}{a^3_{\mathrm{Earth}}} = \frac{P^2_{\mathrm{comet}}}{a^3_{\mathrm{comet}}}$$

Wird die Periode P in Jahren und die große Halbachse a in AU gemessen, dann ist das Verhältnis gleich 1, so daß

$$P = a^{3/2} = 6.38\,\mathrm{Jahre}$$

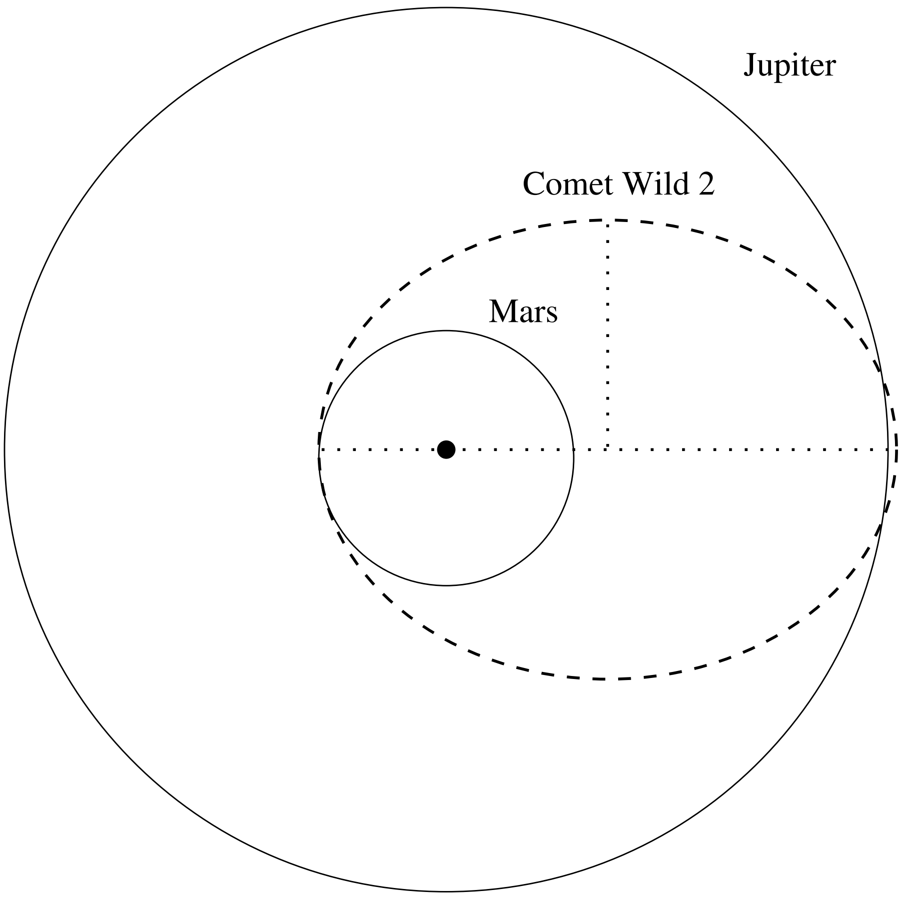
iii. Berechnen Sie die Aphel-Entfernung von Wild 2.

Lösung: Die Aphel-Entfernung ist

$$d_{\mathrm{aphelion}} = a(1+e) = 5.3\,\mathrm{AU}$$

iv. Skizzieren Sie die Bahnen von Wild 2, Mars und Jupiter. Sie können annehmen, daß die Jupiter- und Marsbahnen kreisförmig sind. Die Bahnperiode von Mars ist $P_{♂} = 1.88$ Jahre, die des Jupiter beträgt $P_{♃} = 11.86$ Jahre.

Lösung: Mit der gegebenen Information für Mars und Jupiter können ihre Bahnradien mit Hilfe des 3. Kepler'schen Gesetzes erhalten werden: $a_{♂} = 1.523\,\mathrm{AU}$ und $a_{♃} = 5.2\,\mathrm{AU}$. Diese werte sind *sehr* nahe zu den Perihel- und Aphel-Entfernungen der Kometen, so daß die Zeichnung der Bahn prinzipiell sehr einfach ist, wenn noch der oben gefundene Wert für die kleine Halbachse berücksichtigt wird :



b) Die Jupitermonde umkreisen den Planeten auf Kreisbahnen. Die Bahnperiode von Europa beträgt $P_{\mathrm{Europa}} = 3.55$ Tage und ihre Halbachse ist $a_{\mathrm{Europa}} = 671000\,\mathrm{km}$. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Masse des Jupiter und geben Sie diese in kg und in Erdmassen an. Welche Annahme benutzen Sie?

Lösung: Die korrekte Beantwortung dieser Frage setzt die Kenntnis der physikalischen Form von Keplers 3. Gesetz voraus :

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_\mathrm{J} + m_\mathrm{E})}$$

wo m_J und M_E die Massen von Jupiter und Europa sind und wo a der Radius der Europa-Bahn ist. Wir müssen dabei annehmen, daß $m_\mathrm{E} \ll m_\mathrm{J}$, was mit Ausnahme des Erde-Mond-Systems eine gute Annahme ist. Daher ist

$$m_\mathrm{J} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{P^2}$$

mit

$$a = 671000\,\mathrm{km} = 6.71 \times 10^8\,\mathrm{m}$$
$$P = 3.55\,\mathrm{Tagen} = 306720\,\mathrm{s}$$

ergibt sich die Jupitermasse zu

$$m_\mathrm{J} = \frac{4\pi^2}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}} \cdot \frac{3.02 \times 10^{26}\,\mathrm{m^3}}{9.41 \times 10^{10}\,\mathrm{s^2}} = 1.9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg} = 317\,M_{♁}$$

(der korrekte Wert, der mit einer genaueren Methode erhalten wurde, ist 318 $M_{♁}$)

c) Asteroiden und Kometen sind kleine Körper des Sonnensystems.

i) Vergleichen Sie Größe, Aufbau und Zusammensetzung von Asteroiden mit denen der Kometen

Lösung: Komet = schmutziger Schneeball, wenige km groß, Asteroid=Gesteinsbrocken, 100m – 500km groß

ii) Wo vermutet man den Ursprungsort der langperiodischen Kometen? Wo den der kurzperiodischen (<200 Jahre) Kometen? Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung: Langperiodische: Oortsche Wolke, Kugelförmig um das Planetensystem, Radius 40000 AU
Periodische: Kuiperbelt jenseits der Neptunbahn in der Ekliptik (mehr oder weniger). Skizze:

Frage 2: *Sterne*

a) Beteigeuze (α Ori) hat scheinbare Helligkeiten von $m_\mathrm{V} = 0.42$ mag im V-Band (um $\lambda = 5500$ Å) und $m_\mathrm{B} = 2.27$ mag im B-Band (um $\lambda = 4200$ Å) und eine Parallaxe von 6.55 Millibogensekunden.

i Was ist die Entfernung von Beteigeuze?

Lösung: Die Entfernung ist $d = 1/0.00655 = 153\,\mathrm{pc}$.

ii Was ist die absolute Helligkeit von Beteigeuze im V-Band?

Lösung: Die absolute Helligkeit ist

$$M = m - 5\log d + 5 = -5.50\,\mathrm{mag} \tag{s2.1}$$

iii Geben Sie die Farbe von Beteigeuze in mag an. Sieht der Stern eher rötlich oder eher bläulich aus? Schätzen Sie die Temperatur und den Spektraltyp des Sterns ab.

Lösung: B − V = 2.27 mag − 0.42 mag = 1.85 mag . Das ist extrem rot , d.h. Beteigeuze ist vom Spektraltyp M und hat eine Temperatur im Bereich von ca. 2500 K

iv Die Sonne hat eine absolute Helligkeit im V-Band von $M_\mathrm{V} = 4.5$ mag. Bestimmen Sie die Leuchtkraft von Beteigeuze in Einheiten von Sonnenleuchtkräften und in Watt. Gehen Sie dabei (fälschlicherweise) davon aus, dass die bolometrische Korrektur vernachlässigbar ist.

Falls Sie Teilaufgabe aii nicht gelöst haben, benutzen Sie den Wert für Sirius, $M_\mathrm{V} = -1.5$ mag.

Lösung: Für absolute Magnituden gilt

$$M_1 - M_2 = -2.5\log\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{L_1}{L_2} = 10^{-\frac{2}{5}(M_1-M_2)} \tag{s2.2}$$

und damit $L_\mathrm{Beteigeuze} = 10^4\,L_\odot = 4\times10^{30}\,\mathrm{W}$.

v Schätzen Sie mit den oben erhaltenen Werten für Leuchtkraft und Temperatur den Radius von Beteigeuze ab. Vergleichen Sie Beteigeuze mit typischen Skalen im Sonnensystem.

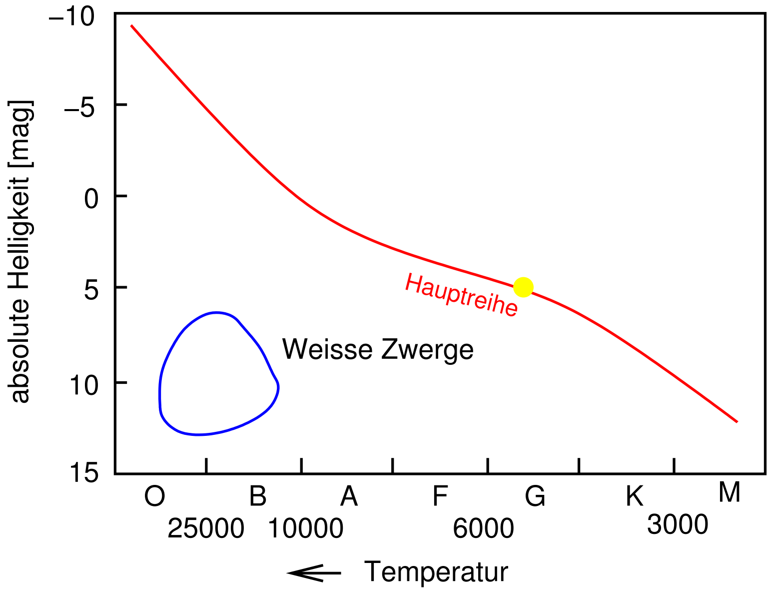
Falls Sie Teilaufgabe aiii *nicht* gelöst haben, arbeiten Sie weiter mit Werten für Sirius: 15.8 $L_\odot$ und $T = 10000$ K.

Lösung: Es gilt

$$L = 4\pi R^2\,\sigma T^4 \quad\Longrightarrow\quad R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}} = 1.9\times10^{11}\,\mathrm{m} = 1.26\,\mathrm{AU} \tag{s2.3}$$

b) Zeichnen Sie ein Hertzsprung-Russell-Diagramm, wie es Beobachter zeichnen würden, d.h. tragen Sie die *absolute Helligkeit* gegen den Spektraltyp auf. Zeichnen Sie in das Diagramm die Hauptreihe, die Lage der Sonne, typische Temperaturen und die Lage von Beteigeuze ein (siehe vorherige

Teilaufgabe; benutzen Sie Sirius, falls ihnen für Beteigeuze Werte fehlen). Vergessen Sie die Achsenbeschriftung nicht!



Lösung:

Wichtige Punkte sind: Spektraltypen , Helligkeitsbereich , Lage der Hauptreihe , Lage der Sonne , typische Temperaturen und die Position von Beteigeuze .

c) Warum sind in Sternen des Spektraltyps O keine oder nur sehr schwache Wasserstofflinien nachweisbar?

Lösung: Sterne des Typs O sind sehr heiss (im Bereich von 30000 K), daher ist Wasserstoff vollständig ionisiert und kann keine Absorptionslinien mehr verursachen

d) Doppelsterne

i. Beschreiben Sie stichwortartig die beiden Hauptklassen von Doppelsternen.

Lösung: Visuelle Doppelsterne=Trennbar im Teleskop, elliptische Bahnform und spektroskopische Doppelsterne=Nachweis durch Spektroskopie: doppellinige Spektren, periodische Variation der Spektrallinien hervorgerufen durch Doppereffekt.

ii. Geben Sie zwei Methoden zum Nachweis eines unsichtbaren Begleiters an .

Lösung: Periodische Schwankung der Eigenbewegung oder periodische Änderung der Radialgeschwindigkeit (bei spektroskopischen Doppelsternen) des sichtbaren Sterns.

iii. Welche stellaren Zustandsgrößen lassen sich bei bedeckungsveränderlichen Doppelsternen bestimmen?

Lösung: Masse und Radius.

e) Die Solarkonstante, d.h. der durch eine Kugel mit Radius 1 AU fliessende Strahlungsfluß beträgt $F = 1370\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

i. Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Leuchtkraft der Sonne.

Lösung: Unter Benutzung von

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

ergibt sich die Sonnenleuchtkraft, L, zu

$$L = 4\pi r^2 F = 4\pi \cdot 2.25 \times 10^{22}\,\mathrm{m}^2 \cdot 1370\,\mathrm{W\,m^{-2}} = 3.9 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$$

ii. Von der Erde aus betrachtet hat die Sonne einen Winkeldurchmesser von 0.5°. Bestimmen Sie daraus den Durchmesser der Sonne in km. Welche Näherung können Sie machen?

Lösung: Der Winkeldurchmesser der Sonne in Radian ist

$$\alpha = 0.5^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 8.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$$

Daher ist der Sonnendurchmesser gegeben durch

$$D = \alpha r = 8.7 \times 10^{-3} \cdot 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m} = 1.3 \times 10^{6}\,\mathrm{km}$$

(N.B. Beachte, daß hier aufgrund der kleinen Winkel *keine* Trigonometrie notwendig ist!)

iii. Bestimmen Sie mit Hilfe des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes die Oberflächentemperatur der Sonne.

Lösung: Die Oberflächentemperatur der Sonne ist

$$T = \left(\frac{L}{4\pi R^2\,\sigma_{\mathrm{SB}}}\right)^{1/4} = \left(\frac{3.9 \times 10^{26}\,\mathrm{W}}{4 \times 3.1414 \times 4.9\;10^{17}\mathrm{m}^2\;5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}}\right)^{1/4} = 5774\,\mathrm{K}$$

f) Ein sonnenähnlicher Stern (gleiche absolute Helligkeit wie die Sonne) und ein Stern mit den Eigenschaften von Sirius befinden sich in einem Doppelsternsystem. Was ist die absolute Helligkeit des Gesamtsystems?

Lösung: Aus der Definition der Magnitude ergibt sich

$$\frac{I_1}{I_\mathrm{c}} = 10^{-\frac{2}{5}(m_1 - m_\mathrm{c})} \tag{s2.4}$$

wo m_c die Magnitude und I_c Intensität eines Vergleichssterns sind.

$$\frac{I_1 + I_2}{I_\mathrm{c}} = 10^{-\frac{2}{5}(m_1 - m_\mathrm{c})} + 10^{-\frac{2}{5}(m_2 - m_\mathrm{c})} \tag{s2.5}$$

Sei obdA $m_\mathrm{c} = 0\,\mathrm{mag}$. Dann ist

$$\frac{I_1 + I_2}{I_\mathrm{c}} = 10^{-\frac{2}{5}m_1} + 10^{-\frac{2}{5}m_2} \tag{s2.6}$$

und damit

$$m_\mathrm{tot} = -2.5\log\left(10^{-\frac{2}{5}m_1} + 10^{-\frac{2}{5}m_2}\right) \tag{s2.7}$$

was natürlich auch für absolute Helligkeiten gilt. Als Zahlenwert ergibt sich mit den Werten aus Teilaufgabe a) oben $M_\mathrm{tot} = -1.5$ (d.h. der siriusähnliche Stern würde die Sonne komplett überstrahlen).