Algorithmik kontinuierlicher Systeme Zusammenfassung

Autor: Julian Kotzur - julian-kotzur@live.de

Matrix-Vektor-Multiplikation $A\vec{b}$ mit vollbesetzter Matrix A	$\mathcal{O}(n^2)$
Matrix-Vektor-Multiplikation $A\vec{b}$ mit m-diagonaler Matrix A	$\mathcal{O}(m \cdot n)$
Matrix-Vektor-Multiplikation $A\vec{b}$ mit tridiagonaler Matrix A	$\mathcal{O}(n)$
Matrix-Vektor-Multiplikation mit Rang-1-Matrix und $A = uv^T$	$\mathcal{O}(n)$
Berechnung der euklidischen Vektor-Norm	$\mathcal{O}(n)$
Matrix-Matrix-Multiplikation AB mit vollbesetzten Matrizen A und B	$\mathcal{O}(n^3)$
Matrix-Matrix-Multiplikation AB mit vollbesetzten Matrizen A und m-diagonaler Matrix B	$\mathcal{O}(m \cdot n^2)$
Matrix-Matrix-Multiplikation AB mit vollbesetzter Matrix A und tridiagonaler Matrix B	$\mathcal{O}(n^2)$
Berechnung der Inversen einer invertierbaren (n×n)-Diagonalmatrix	$\mathcal{O}(n)$
Rang einer invertierbaren n×n-Matrix	n

Bestimmung der LR- bzw. QR-Zerlegung	$\mathcal{O}(n^3)$
Bestimmung der LR-Zerlegung einer m-diagonalen Matrix	$\mathcal{O}(m^2 \cdot n)$
Lösen eines Gleichungssystems mit gegebener LR-/ QR-/ SVD-Zerlegung	$\mathcal{O}(n^2)$
Lösen eines Gleichungssystems mit gegebener LR-/ QR-Zerlegung bei m-diagonaler Matrix	$\mathcal{O}(m \cdot n)$
Lösen eines Gleichungssystems ohne LR-Zerlegung	$\mathcal{O}(n^3)$
Vorwärts- / Rückwärtssubstitution	$\mathcal{O}(n^2)$
Bestimmung der Determinante bei gegebener LR-Zerlegung	$\mathcal{O}(n)$
Bestimmung der Determinante bei gegebener PLR-Zerlegung	$\mathcal{O}(n^2)$
Bestimmung der Betragsdeterminante bei gegebener QR-/ PLR-Zerlegung	$\mathcal{O}(n)$

Auswertung eines Punktes auf einer Bezier-Kurve mit De Casteljau	$\mathcal{O}(n^2)$
Anzahl der Kontrollpunkte einer Bezier-Kurve mit Grad n	n+1
Grad einer Bezier-Kurve mit n Kontrollpunkten	n-1

Ein Iterationsschritt bei Jacobi bzw. Gauss-Seidel bzw. SOR	$\mathcal{O}(n^2)$
Anzahl der Iterationsschritte bei SOR bzw. Aitken-Neville	$\mathcal{O}(\sqrt{n})$
Anzahl der Iterationsschritte bei Jacobi bzw. Gauss-Seidel	$\mathcal{O}(n)$
Konvergenzordnung Jacobi, Gauss-Seidel oder SOR	p = 1
Berechnung der Fourier-Transformation OHNE FFT	$\mathcal{O}(n^2)$
Berechnung der Fourier-Transformation MIT FFT	$\mathcal{O}(n \cdot log(n))$
Bestimmung der Koeffizienten bei Interpolation mit Newtonbasis	$\mathcal{O}(n^2)$

Approximationsfehler Stückweise konstante Interpolation	$\mathcal{O}(h)$
Approximationsfehler stückweise linearer Interpolation mit h	$\mathcal{O}(h^2)$
Approximationsfehler Catmull-Rom-Interpolation	$\mathcal{O}(h^3)$
Approximationsfehler Trapez-Regel mit $h = (b-a)/n$	$\mathcal{O}(h^2)$
Approximationsfehler iterierter Simpson-Regel mit $h = (b-a)/n$	$\mathcal{O}(h^4)$
Konditionszahl einer Rotationsmatrix	1

Python Grundlagen

Grundlagen

1. Einrücken ist Pflicht
2. $+, -, *, \%, **, /$-Operatoren sind kanonisch
3. //- Operator dividiert und rundet ab (danach float var)
4. Variablenzuweisung:
   Mehrfachzuweisung: a , b = 5 , 6 (links nach rechts)
   Werte tauschen: a , b = b , a
   Gleichen Wert zuweisen: a = b = c = 0
5. Strings: name = 'string' → kann man addieren
6. Boolsche Ausdrücke werden kanonisch verwendet
7. Boolsche Funktionen werden ausgeschrieben: and/ not/ or
8. Funktionen: def <name> (<parameter>):
9. Nichts tun: pass
10. Modul: import <modulname> as <Pseudonym>
11. Typkonvertierung: datentyp(Variable)
12. Eingabe: s = input("Text fuer Ausgabe")
    input wird immer als String übergeben
13. Ausgabe: print(...)

Datenstrukturen

1. Listen:
   liste = [3 , 2 , 1 , 'foo'] // Erstellen
   liste.append(val) // item hinten anhängen
   liste.insert(idx, val) // item an index einfügen
   liste.remove(val) // entfernt erstes item mit wert val
   liste.sort // sortiert liste nach größe
   tuple(liste) // Wandelt Liste in Tupel um
2. Tupel: tupel = (3 , 2 , 1 , 'foo')
3. Hashtable: hash = {1:'Hallo', 2:'Welt', 3:42}
4. Zugriff: name[<index>]. Index bei Hastable individuell
5. Teilmengen auswählen: Start : Ende, wobei Start eingeschlossen ist, Ende nicht: [0,1,2,3,4][1:3] → [1, 2]
6. Sprunggröße von Teilmengen: [Start:Ende:Sprungröße]
7. in-Operator: Testet auf Zugehörigkeit: 5 in liste → true

Kontrollfluss

1. Bedingungen wie in Java nur mit Einrückungen
2. while-Schleife: while <booleanFlag>
3. for-Schleife:
   (a) for i in [1,2,3]
   (b) for i in range(n) // geht von 0 bis n-1
   (c) for i in range(n,m,x) // jedes xte Element

Lambda-Funktion

1. Kleine anonyme Funktion
2. Syntax: lambda arguments : expression
3. Beispiel Summe: x = lambda a, b, c : a + b + c
   print(x(5, 6, 2))

Numpy

1. import numpy as np
2. Arraygröße / Form ausgeben als Tupel:
   mtx.shape → (2, 3)
3. Array erstellen:
   mtx = np.array([[1,2,3],[4,5,6]]) // Definierte Matrix
   mtx = np.eye(<dimension>) // Einheitsmatrix
   mtx = np.full(<shape>,<wert>) // Alle Elemente = wert
4. Wichtige Matrix Operationen:
   mtx = np.transpose(mtx) // Transponieren
   mtx = np.dot(matrix1, matrix2) // Matrixmultiplikation
   vec = mtx.flatten() // Zeilenweise ausgelesener Vektor
   vec = mtx.flatten('F') // Spaltenweise ausgelesener Vektor
   vec = np.arange(wert,wert) // Vektor analog zu range
   vec = np.linalg.solve(matrix,vektor) // LGS lösen
5. Wichtige Mathe Operationen:
   x = np.absolute(y) // Betrag eines Wertes

Slicing

1. Anwendbar auf Strings, Arrays, Listen, Tupeln, etc.
2. Damit wird ein Teil einer Datenstruktur ausgewählt:
   a[start:stop] // items start through stop-1
   a[start:] // items start through the rest of the array
   a[:stop] // items from the beginning through stop-1
   a[:] // a copy of the whole array
   a[start:stop:step] // start through not past stop, by step
3. Mit negativen Werten kann man auch arbeiten:
   a[-1] // last item in the array
   a[-2:] // last two items in the array
   a[:-2] // everything except the last two items
4. Weitere Beispiele:
   a[::-1] // all items in the array, reversed
   a[1::-1] // the first two items, reversed
   a[:-3:-1] // the last two items, reversed
   a[-3::-1] // everything except the last two items, reversed

Zusatz

1. Zuweisungen kopieren nicht (Referenzübergabe)
2. Kopieren einer Variable:
   varNeu = varAlt.copy()
3. Variable Anzahl an Argumenten: def name(*args):
4. Standartwerte für Argumente: def name(x, y=2):
5. Fehlertesten: try ... except (Einrücken!)
6. Klassen und OOP:
   (a) Erstellen: class klassenName:
   (b) Kontruktor: def __init__(self, <attribute...>)
   (c) Klassenmethode: def name(self, <parameter>)
   (d) Objekt erstellen: name = klassenName(<attribute>)
   (e) Methode aufrufen:name.methodenname(<parameter>)

Grundwissen

Grundlagen 2x2-Matrix

Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$

Inverse der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rotationsmatrix:

$$R_\omega = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$$

Grundlagen 3x3-Matrix

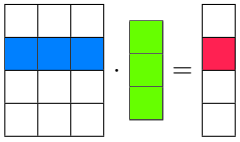
Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{pmatrix}$$

Grundlagen Matrizen Allgemein:

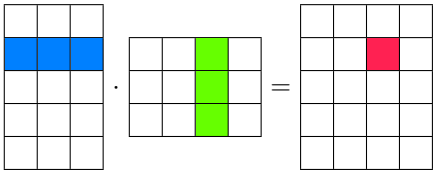
1. **Charakteristisches Polynome:**
   Determinante der Matrix mit Diagonaleinträge - λ
2. **Eigenwerte:**
   Nullstellen des charakteristischen Polynoms
3. **Eigenvektoren:**
   Eigenwerte einsetzen und Gaußen
4. **Zusammenhang zw. Eigenwerten und Eigenvektoren:**
   $Av = \lambda v$ Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. **Rang:**
   Anzahl der linear unabhängigen Zeilen
   Gaußen und alle nicht-null-Zeilen zählen
6. **Determinante einer Dreieckmatrix:**
   Diagonalen zusammenmultiplizieren

Vektor-Matrix-Multiplikation:



Red = (Blue1 · Green1) +
(Blue2 · Green2) +
(Blue3 · Green3)

Matrix-Matrix-Multiplikation:



Grundlagen Matrizen speziell:

1. **Eigenschaften orthogonaler Matrizen Q:**
   Q^TQ = Einheitsmatrix
   QQ^T = Einheitsmatrix
   Spalten oder Zeilen von Q bilden eine Orthonormalbasis
2. **Matrizen transponieren:**
   Zeilen Spaltenweise auslesen
3. **Diagonalmatrizen invertieren:**
   Diagonaleinträge hoch -1 rechnen
4. **Matrizen Definitheit:**
   Positiv Definit: Alle Eigenwerte größer 0
   Positiv Semidefinit: Alle Eigenwerte größer gleich 0
   Negativ Definit: Alle Eigenwerte kleiner 0
   Negativ Semidefinit: Alle Eigenwerte kleiner gleich 0
5. **Singuläre / Reguläre Matrizen:**
   Eine Matrix ist Reguläre, wenn sie eine Inverse besitzt. Ansonsten ist sie singulär. Eine Inverse lässt sich bilden, wenn alle Spalten linear unabhängig sind (Keine null Zeile beim Gaußen)
6. **Euklidische Vektornorm:**
   Wurzel der (Summe der (Einträge zum Quadrat))

Gauß-Algorithmus:

1. Auswahl des Ausgangswertes x (Diagonalenwert)
2. Pro Element i der Spalte von x:
   (a) Divident D zwischen i und x bilden: $^i/_x$
   (b) Zeile von i mit D * (Zeile von x) subtrahieren

Python-Code

Vorwärtssubstitution:
→ Zur Lösung von linken unteren Dreiecksmatrizen
→ Lösung in x[]

```
for j=1...n
 x[j] = c[j]
 for i=1...j-1
  x[j] -= L[j,i]*x[i]
 x[j] = x[j]/L[j,j]
```

Rückwärtssubstitution:
→ Zur Lösung von rechten oberen Dreiecksmatrizen
→ Lösung in x[]

```
for j=n...1
 x[j] = c[j]
 for i=j+1...n
  x[j] -= R[j,i]*x[i]
 x[j] = x[j]/R[j,j]
```

Quadratische Konvergenz:

Fehler zur optimalen Lösung nimmt quadratisch ab

Lattice-Boltzmann-Methode

1. Dichte: Summe aller Einträge einer Zelle
2. Geschwindigkeit: Unterscheidung zw. x und y Richtung. Summe (Einträge mal Richtung). Das ganz noch mit 1 / Dichte multiplizieren

Gleitkommaarithmetik

1. Assoziativgesetz gilt nicht: $(x + y) + z \neq x + (y + z)$
2. Distributivgesetz gilt nicht: $x \cdot (y + z) \neq x \cdot y + x \cdot z$

Matrizen - Datenstrukturen und Verfahren

Dünn besetzte Matrix:
Eine Matrix in der ein Großteil der Einträge 0 ist. Dies tritt oft bei Gleichungssystemen auf.

Hinweis:
Die Indizierung in AlgoKs beginnt üblicherweise bei 1.

Matrix-Arten

Diagonal | Tridiagonal | Blockdiagonal

Compressed Row Storage (CRS)

Vorgehensweise:

1. Value-Array mit allen Werten der Matrix erstellen. Diese Zeilenweise auslesen
2. Spalten-Array anlegen, welches für jeden Wert im Value-Array die dazugehörige Spalte speichert. Hierbei auf Indizes achten!
3. Pointer-Array anlegen, welches die Indizes des Value-Array speichert, ab welchem eine neue Zeile beginnt. Bei einer Nullzeile wird ein Pointer 2 mal gesetzt (d.h. 2 mal gleiche Zahl direkt hintereinander in ptr gibt null-Zeile an)

Nachteil:
→ Einfügen und Löschen ist schwierig
→ Kein beliebiger Zugriff auf einzelne Elemente

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} val &= [5,3,7,4] \\ col\_ind &= [1,2,3,2] \\ row\_ptr &= [1,2,4,5] \end{aligned}$$

Compressed Column Storage (CCS)

Funktioniert Analog zu CRS.

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} val &= [7,2,1,4,7] \\ row\_ind &= [1,2,1,3,2] \\ col\_ptr &= [1,3,5,6] \end{aligned}$$

Blocked Compressed Row Storage (BCRS)

Im Value Array werden Matrizen gespeichert.

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} val &= [\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}] \\ col\_ind &= [1,2] \\ row\_ptr &= [1,2,3] \end{aligned}$$

Multiplikation mit CRS

1. Zeile aus ptr-Array wählen.
2. Value anhand col-Array mit Eintrag aus Vek multiplizieren
3. Bei mehreren Values pro Zeile: Ergebnisse addieren
4. Hinweis: Reihenfolge und Transponierungen beachten!

Komprimierte Matrix transponieren

1. val bleibt gleich
2. $col\_ptr = row\_ptr$
3. $row\_ind = col\_ind$

Diskretisierung

Grundwissen

1. Uniform: Nahezu gleichverteile Punkte
2. Nicht Uniform: Ungleich verteilte Punkte
3. Uniforme Quantisierung: Zerlegung eines Wertebereiches in disjunkte, gleich große Teilintervalle
4. Kondition: Eigenschaft des Problemes. Ein Problem ist gut konditioniert, wenn Fehler in den Eingangsdaten nicht verstärkt werden, d.h. kleine Eingabestörungen führen nur zu kleinen Ergebnisänderungen (nicht zu großen)
5. Stabilität: Eigenschaft des Algorithmus. Dieser ist stabil, wenn sich die Rechenfehler nicht anhäufen. Dies gilt nicht für mehrfache Berechnung mit demselben Algorithmus.
6. Kondition linearer Gleichungssysteme:
   (a) Matrixnorm wählen: Spalten-/Zeilensummennorm
   (b) Entsprechende Normen berechnen
   (c) Maximalwert durch Minimalwert teilen

$$\text{Beispiel: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

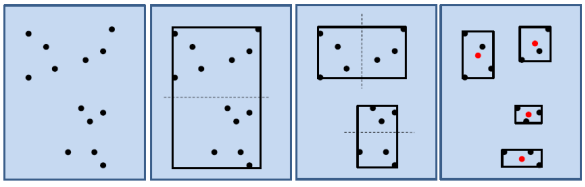
$$\text{Spaltensummennorm} = \frac{max\{(|1|+|3|),(|2|+|4|)\}}{min\{(|1|+|3|),(|2|+|4|)\}}$$

$$\text{Zeilensummennorm} = \frac{max\{(|1|+|2|),(|3|+|4|)\}}{min\{(|1|+|2|),(|3|+|4|)\}}$$

7. Fehlerquellen numerischer Algorithmen:
   (a) Eingabeungenauigkeit, Rundungsfehler
   (b) Diskretisierungs- /Quantisierungsfehler

Median-Cut-Algorithmus

1. Finde best-fittende bounding box (Rechteck / Quadrat)
2. Teile Quader an längster Kante so dass beide Teile gleich viele Punkte enthalten
3. Schritt 1 und 2 rekursiv wiederholen



Vektorielle Variante

1. Initialisierung: Wähle k zufällige Mittelwerte
2. Zuordnung: Jedes Datenobjet wird demjenigen Cluster zugrordnet, bei dem die Cluster Varianz am wenigsten erhöht wird
3. Berechne die Mittelpunkte der Cluster neu
4. Schritt 2 und 3 werden bis zur Konvergenz wiederholt

LR-Zerlegung

L ist linke untere, R ist rechte obere Dreiecksmatrix
Lösung des Gleichungssystems:

$$Ax = b \Leftrightarrow LRx = b \Rightarrow Ly = b \Rightarrow Rx = y$$

Algorithmus ohne Pivotsuche

Wann kann man das verwenden:

1. Wenn eine Permutationsmatrix gegeben ist und ich diese mit der Ausgangsmatrix A multiplizieren
2. symmetrisch positiv definite Ausgangsmatrix

L-Matrix und R-Matrix erstellen:

1. L Matrix als Einheitsmatrix erstellen
2. Gauß-Algorithmus auf Ausgangsmatrix anwenden
3. Zeilenmultiplikatoren der aktuelle Spalte in L eintragen

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ -2 \to 0 & 1 & 1 & 2 \\ +3 \to 0 & -4 & -7 & -6 \\ +2 \to 0 & 1 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \text{II} - (-2)\ \text{I} \\ \text{III} - 3\ \text{I} \\ \text{IV} - 2\ \text{I} \end{pmatrix}$$

Algorithmus mit Pivotsuche

Ausgangsmatrix A mit Dimension n ist gegeben:

1. Initialisieren: L als Nullmatrix, R als Kopie von A, P als Einheitsmatrix. Alles mit Dimension n
2. Für i = 1 bis i = n-1:
   (a) Initialisiere Permutationsmatrix P_i als Einheitsmatrix
   (b) Spalte j des Pivots aus Spalte i ab Zeile i finden
   (c) In L / R / P_i Zeilen i und j tauschen
   (d) In R in Spalte i ab Zeile j Gaußen und in L die Multiplikatoren (Gekürztes / Pivot) eintragen
3. P = $\prod_{i=1}^{n-1} P_i$, Diagonale in L mit 1er befüllen, R = R

Tipp: Kürzen ist nicht erlaubt!
Beispiel:

Initialisieren:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

1. Schritt:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 0 & \frac{19}{4} & 1/2 \\ 0 & -7/2 & 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

2. Schritt:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\frac{14}{19} & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 0 & \frac{19}{4} & 1/2 \\ 0 & 0 & \frac{45}{19} \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fazit:

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & -\frac{14}{19} & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 0 & \frac{19}{4} & 1/2 \\ 0 & 0 & \frac{45}{19} \end{pmatrix}, P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

QR-Zerlegung

Q ist orthogonal, R ist rechte obere Dreiecksmatrix
Lösung des Gleichungssystems:

$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Rightarrow Rx = Q^T b$$

Algorithmus mittels Givensrotation

Rotationsmatrix: $J_{ij}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & cos_{jj}(\Phi) & -sin_{ij}(\Phi) & \\ & sin_{ji}(\Phi) & cos_{ii}(\Phi) & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

1. Initialisiere Q = Einheitsmatrix und R = A
2. Für j = 1 bis j = m // Spalten m-lang
   (a) Für i = j+1 bis i = n // Zeilen n-lang
   (b) Bilde $J_{ij}(\Phi)$ mit: (sign() = Vorzeichen())

$$cos(\Phi) = \frac{sign(a_{jj}) \cdot a_{jj}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}} \quad sin(\Phi) = -\frac{sign(a_{jj}) \cdot a_{ij}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}}$$

   (c) Setze in $R = J_{ij}(\Phi) \cdot R$
   (d) Setze $Q = Q \cdot J_{ij}(\Phi)^T$
3. Gib Q und R aus

Tipp: $a \cdot cos(w) + b \cdot sin(w) = 0 \Rightarrow w = -tan^{-1}(a/b)$
Beispiel:

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} cos(\Phi) = 4/5 \\ sin(\Phi) = -3/5 \end{matrix} \Rightarrow J_{ij} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Result: $R = \begin{pmatrix} 5 & \frac{27}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

Algorithmus mittels Householder

Note: n-1 Householer-Spiegelungen werden benötigt

1. Setze R = A und Q = Einheitsmatrix
2. Für i = 1 bis i = n-1: // Spalten
   (a) Setze $v_i = a_{*i}$ // v_i = i-te Spalte von A
   (b) Berechne: $x_i = \left(\sum_{j=i}^{n} (a_{ji}^2)\right)^{1/2} \cdot sign(a_{ii})$ // Norm
   (c) Setze $v_i = v_i + x_i \cdot e_i$ mit e_i = i-ter Einheitsvektor
   (d) Berechne Q_i = Einheitsmatrix $- \frac{2 v_i v_i^T}{v_i^T v_i}$
   (e) Setze $R = Q_i \cdot R$ und $Q = Q \cdot Q_i^T$
3. Gib Q und R zurück

Beispiel: $A = R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$v_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, x = \sqrt{4^2 + 3^2} * sign(+4) = 5 \Rightarrow v_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (3, 1)}{(3, 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}/10$$

$$\Rightarrow Q = Q \cdot Q_0^T = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}, R = Q_0 \cdot R = \begin{pmatrix} -5 & -5.4 \\ 0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

Betrag der Determinante berechnen

1. $|det(A)| = |det(Q)| \cdot |det(R)|$
2. $|det(Q) = 1|$ da orthogonal
3. $|det(R)$ = Produkt der Diagonaleinträge

Lineare Ausgleichsproblem /-polynom

Überbestimmte Ausgleichungsprobleme

1. A sei $n \times m$-Matrix mit $n > m$ (n Zeilen, m Spalten)
2. Mehr Gleichungen als Variablen: Überbestimmt
3. Weniger Gleichungen als Variablen: Unterbestimmt
4. Das Residuum $r(x) = b - Ax$ kann durch kein x 0 werden
5. Daher Versucht man das Residuum zu minimieren. Dieser Ansatz wird Lineares Ausgleichungsproblem genannt.

Theorie - Least Square Minimierung

1. Methode der kleinsten Quadrate
2. Finde $\hat{x}$, so dass $\|r(\hat{x})\| \leq \|r(x)\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$
3. Minimierung über die euklidische Norm $\|r\| = \sqrt{\sum r_i^2}$.
4. $\Rightarrow$ Immer eindeutig bestimmtes kleinstes Residuum.
5. $\Rightarrow$ ABER: $\hat{x}$ ist nur dann eindeutig, wenn spalten von A linear unabhängig.

Bestimmung von Ax=b aus Messpunkten

1. Gegeben: Messpunkte $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$
2. Gegeben: gesuchtes Polynom: $y = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0$
3. Die Matrix A hat m+1 Spalten und n Zeilen. Bei einer Geraden Gleichung hat A somit 2 Spalten.
   Matrix Baukonstrukt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \text{ mit } b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Methodik: QR-Zerlegung

1. Gegeben: QR-Zerlegung von A
2. Es können nur die oberen m Gleichungen einer überbestimmten Matrix erfüllt werden, alle anderen Zeilen werden verworfen.
3. Gelöst wird dies durch Rückwärtssubstitution
4. Die verworfenen Zeilen bestimmen das Residuum

Methodik: Normalengleichung

1. Nur für Überbestimmte Gleichungssysteme mit vollem Rang (alle Zeilen linear unabhängig)
2. Theorie: Bestimme $\min ||b - Ax||^2$

$$\text{Löse: } A^T Ax = A^T b$$

3. Bei Rückwärtssubstitution entspricht die erste Lösung dem a des höchsten Index. Somit entspricht die letzte Lösung dem a mit dem kleinsten Index

Cramersche Regel

Zu lösen ist das Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Berechne die Determinante $det(A)$ der Matrix A.
2. Für$i = 1, \dots, n$:

   Ersetze Spalte i durch b. (Nenne neue Matrix A_i)

   Berechne Determinante $det(A_i)$.

   Berechne $x_i = \frac{det(A_i}{det(A}$
3. Gib Lösungsvektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ aus.

Interpolation

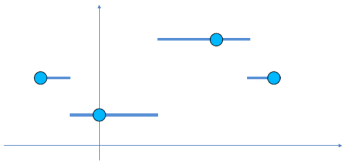
Interpolation: Kurve verläuft exakt durch alle Punkte

Stückweise konstante Interpolation / Nearest Neighbor

$$p(x) = \begin{cases} y_1 & \text{falls } x_1 \leq x \leq 1/2(x_1 + x_2) \\ y_1 & \text{falls } 1/2(x_1 + x_2) \leq x \leq 1/2(x_2 + x_3) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n & \text{falls } 1/2(x_{n-1} + x_n) \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Beispiel:

x_i	-1	0	2	3
y_i	2	1	3	2



Stückweise lineare Interpolation

1. Um den Wert an Stelle x anzunähern, suche die nächstgelegenen Stützstellen x_i und x_{i+1}
2. Interpolierter Wert:

$$p(x) = m_i(x - x_i) + y_i \text{ mit } m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

3. Somit wird für jedes Punkte-Paar eine Gerade berechnet, welche diese verbindet

Catmull-Rom-Interpolation

1. lokale und glatte Interpolation
2. Gegeben: Stützstellen x_n und Stützwerte y_n
3. Erster Punkt durch Vorwärtsdifferenz: $y_1' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
4. Letzter Punkt durch Rückwärtsdifferenz: $y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$
5. Zwischenpunkte aus zentraler Differenz: $y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$
6. Berechne auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ das Polynom:

$$p_i(x) = a_0(x_{i+1} - x)^3 + a_1(x_{i+1} - x)^2(x - x_i) + \\ + a_2(x_{i+1} - x)(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^3$$

$$\text{mit } a_0 = \frac{y_i}{(x_{i+1} - x_i)^3}, \; a_1 = 3a_0 + \frac{y_i'}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$\text{und } \; a_3 = \frac{y_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^3}, \; a_2 = 3a_3 - \frac{y_{i+1}'}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Newton Polynom aufstellen

Verwendet wird der Algorithmus von Aitken-Neville

Gegeben: n Punkte (x_i, y_i)

1. Punkte als Tabelle schreiben
2. Jeweils zwei Punkte für neues y berechnen: $\frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$

   Dies passiert pyramidenförmig, bei jeder Pyramidenstufe nimmt der Indexabstand von x um 1 zu, die verwendeten y sind diejenigen der vorherigen Stufe
3. Wiederhole dies, bis nur noch ein y Wert vorhanden ist
4. Die Koeffizienten a_i sind die obersten y-Werte der Pyramide startend mit $a_0 = y_0$
5. Polynom: $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ...$

Lagrange Polynom

Gegeben: n Punkte (x_i, y_i)

1. Berechne i Lagrange-Basen mit:

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0}^{n}(x_i - x_j)} \text{ mit: } j \neq i$$

2. Berechne Lagrange Polynom:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$

Interpolation am Dreieck

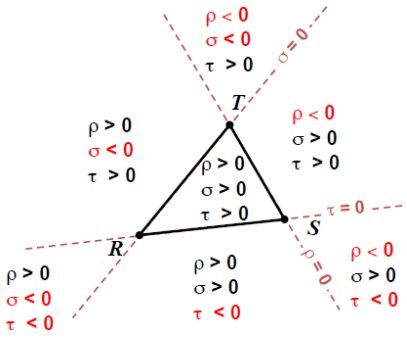
1. Gegeben sind 3 Punkte R,S,T in einer Ebene, welche ein Dreieck aufspannen
2. Im Bezug auf das Dreieck lassen sich Punkte darstellen anhand der Formel $P = \alpha R + \beta S + \gamma T$. Die griechischen Koordinaten nennt man baryzentrische Koordinaten
3. Berechnung der Koordinaten eines Punktes ausgehend von den Baryzentrischen Koordinaten:

$$x(P) = \frac{\alpha x_R + \beta x_S + \gamma x_T}{\alpha + \beta + \gamma} \quad y(P) = \frac{\alpha y_R + \beta y_S + \gamma y_T}{\alpha + \beta + \gamma}$$

4. Berechnung der baryzentrischen Koordinaten ausgehend von einem Punkt: Ax = b, mit x Koordinaten von R,S,T als erste Zeile, mit y Koordinaten von R,S,T als zweite Zeile und einer 1er Zeile als letztes. b sind die gegebenen Punktkoordinaten $(x, y, 1)^T$. Aus der letzten Zeile wird γ, aus der zweiten β und aus der ersten α
5. Funktionswerte mittels Interpolation bestimmen. Dazu sind die 3 Punkte R,S,T gegeben und eine baryzentrische Koordinate:

$$f(x, y) = \alpha f(x_R, y_R) + \beta f(x_S, y_S) + \gamma f(x_T, y_T)$$

   Ist keine Funktion gegeben, können die Funktionswerte aus den Dreieckskoordinaten gegeben sein und ersetzen somit die f(...)-Rechnungen rechts der Gleichung
6. Vorzeichen der baryzentrischen Koordinaten:



Grundwissen - Gerade durch 2 Punkte

(a) Gegeben: 2 Punkte a , b

(b) Gesucht: $mx + t$

(c) $m = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}$ und $t = b_y - mb_x$

Bilineare Interpolation

1. Gesucht: Wert einer Funktion an Punkt P=(x,y)
2. Gegeben: 4 Punkte mit Funktionswerten:
   $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_1), C = (x_1, y_2), D = (x_2, y_2)$
3. Berechnung:

$$f(x, y_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(A) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(B)$$

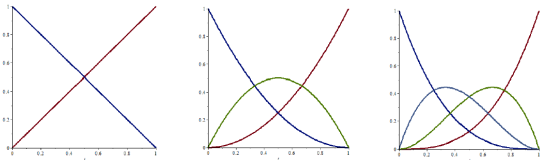
$$f(x, y_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(C) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(D)$$

$$f(x, y) = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2)$$

4. Hint: Es gibt dazu auch eine einzelne Formel

Freiformkurven

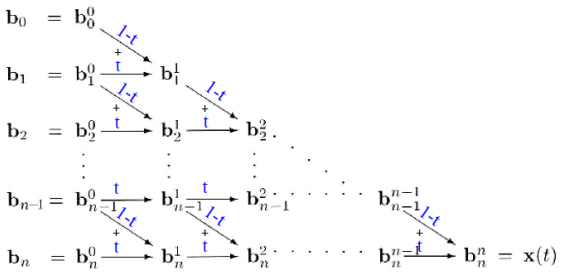
Bernsteinpolynome



Grad 1 | Grad 2 | Grad 3

Bezierkurven

1. Gegeben sind Kontrollpunkte bzw. Bezier-Punkte
2. Aus den Bezier-Punkte erhält man das Kontrollpolygon
3. Eigenschaften von Bezier-Kurven:
   (a) Kurve liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte
   (b) Endpunkt-Interpolation: Die Endpunkte des Kontrollpolygons sind die Endpunkte der Bezier-Kurve
   (c) Affine Invarianz: Für eine affine Abbildung, müssen nur die Kontrollpunkte affin transformiert werden
   (d) Variantsreduktion: Die Kurve schwankt höchstens so stark wie das Kontrollpolygon
4. Berechnung mit de Casteljau:



5. Midpoint Subdivision Algorithmus:
   Aus dem deCasteljau-Dreieck lassen sich zwei weitere Kontrollpolygone bilden (Mittelpunkt als gemeinsamer Punkt), auf welche der Algorithmus rekursiv angewendet wird

Singulärwertzerlegung - Erstellung

Gegeben: Eine Matrix $A \in R^{m \times n}$
Gesucht: Matrizen $U \in R^{m \times m}, \Sigma \in R^{m \times n}, V^T \in R^{n \times n}$

1. Schritt: $A^T A$ berechnen
2. Schritt: Eigenwerte von $A^T A$ bestimmen
3. Schritt: Eigenvektoren v_i berechnen und normieren
4. Schritt: triviale Singulärwerte berechnen: Wurzeln der Eigenwerte. Und nach Größe sortieren!
5. Schritt: Aus Singulärwerten α wird U berechnet:

$$u_i = {}^{Av_i}/_{\alpha_i}$$

6. Schritt: Letzt Spalten von U durch gleichsetzen der bekannten u mit 0 berechnen
7. Schritt: Matrix U erstellen (Nach Größe der Eigenvektoren absteigend und am Ende zusätzlicher Vektor)
8. Schritt: Matrix Σ erstellen:

   Wurzel der Eigenwerte als Diagonale der $R^{m \times n}$-Matrix
9. Schritt: Matrix V^T erstellen

   Eigenvektormatrix transformieren

Eigenschaften der SVD

1. Spektralsatz sichert die Existenz von U,V
2. U ist orthogonal
3. V ist orthogonal

Matrixnormen

Spaltensummennorm

Gegeben: Matrix A $\in R^{m \times n}$
Es wird die Summe der Beträge der Spalten betrachtet

$$||A||_1 = max\{\Sigma \text{ Spalte } 1 \ , ..., \Sigma \text{ Spalte n } \}$$

Zeilensummennorm

Gegeben: Matrix A $\in R^{m \times n}$
Es wird die Summe der Beträge der Zeilen betrachtet

$$||A||_\infty = max\{\Sigma \text{ Zeile } 1 \ , ..., \Sigma \text{ Zeile n } \}$$

Frobeniusnorm

Gegeben: Matrix A $\in R^{m \times n}$

$$||A||_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + ... + a_{nm}^2}$$

In der SVD von A nur Σ betrachten (U und V^T ignorieren)

Specktralnorm

Gegeben: Matrix A $\in R^{m \times n}$
Bei SVD ist $A^T A = \Sigma$

$$||A||_2 = \sqrt{Maximaler \ Eigenwert \ der \ Matrix \ A^T A}$$

Konditionszahl berechnen:

Bei Normen mit einer Max-Suche, teilt man den Max-Wert durch den Min-Wert

SVD Zusatzaufgaben:

Pseudoinverse

1. Sei A^+ die Pseudoinverse zu A
2. Eigenschaften: $A \cdot A^+ \cdot A = A, \ A^{++} = A$
3. Bei SVD ist die Pseudoinverse: $V\Sigma^+ U^T$
4. Lösen eines Gleichungssystems mit Pseudoinverse:
   $U\Sigma V^T x = b \Rightarrow x = U^T \Sigma (V^T)^T b$
5. In welchem Sinne löst die Pseudo-Inverse das LGS:
   Minimiert das Residuum

Rang bestimmen

$rang(A)$= r = Anzahl der von null verschiedenen Singulärwerte

Kern bestimmen

Letzten n-r Spalten aus V^T: $ker(A) = span\{V_{r+1}^T, ..., V_n^T\}$

Bild bestimmen

Ersten r Spalten aus U: $im(A) = span\{U_1, ..., U_r\}$

Rang-n-Approximation

Nur die ersten n Singulärwerte verbleiben in der Σ-Matrix. Der Rest wird auf 0 gesetzt. Dann muss Sigma nur noch in der Ausgangs SVD ersetzt werden.

SVD und Vektoren

1. $V^T \vec{x}$: Drehung von x
2. $\Sigma \vec{x}$: Streckung / Stauchung von x
3. $U \vec{x}$: Drehung von x

PCA

1. Nützlich für Datenkompression
2. Gegeben: Eine Menge an Punkten mit Anzahl n
3. Mittelpunkt aus Punkten berechnen:

$$M = \frac{1}{\text{n}} \cdot \sum_{i=1}^{\text{n}} \text{Punkt}_i$$

4. Mittelpunkt für jeden Punkt berechnen:

$$P_i' = P_i - M$$

5. symmetrische Kovarianzmatrix C bilden:

$$A = (P_0' \ P_1' \ P_n') \Rightarrow C = AA^T$$

6. Eigenwerte λ_m von C berechnen und nach Größe ordnen
7. Eigenvektoren (Hauptachsen) v_m berechnen und nach Größe von λ ordnen
8. C ähnlich zu SVD aufspalten:

$$C = (v_1, ..., v_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

9. object oriented bounding box: Rechteck parallel zu den Eigenvektoren

Iterative Verfahren mit Vektoren

Gauss-Seidel Verfahren

1. Im Allgemeinen nicht parallelisierbar
2. Konvergiert doppelt so schnell wie das Jacobi-Verfahren.
3. Gegeben: Matrix A, Startvektor x^0.
4. Gauss-Seidel-Iterationsschritt:

$$(D+L)x^{i+1} = b - Rx^i$$

   → Lösbar durch Vorwärtssubstitution.
5. Hinweis: SOR-Verfahren mit $w = 1$
6. Tipp: In der Matrix zum Vorwärtssubstituieren dürfen Zeilen vertauscht werden

```
x = np.zeros((n,1))
while np.linalg.norm(b - A@x) > eps:
 for k in range(n):
  left = sum(a[k,0:k]*x[0:k,0])
  right = sum(a[k,k+1:]*x[k+1:,0])
  x[k] = (b[k]-left-right) /a[k,k]
return x
```

Jacobi Verfahren

1. Besser parallelisierbar.
2. Gegeben: Matrix A, Startvektor x^0.
3. Jacobi-Iterationsschritt:

$$Dx^{i+1} = b - (L+R)x^i$$

```
x = np.zeros((n,1))
while np.linalg.norm(b-A@x) >eps:
 x_new = np.zeros((n,1))
 for k in range(n):
  left = sum(a[k,0:k]*x[0:k,0])
  right = sum(a[k,k+1:]*x[k+1:,0])
  x_new[k] = (b[k] - left-right)/a[k,k]
return x_new
```

SOR Verfahren

1. Schnelle Konvergenz durch Überrelaxation
2. Gegeben: Matrix A, Startvektor x^0, Faktor $w \in (1,2)$.
3. SOR-Iterationsschritt:

$$(1/wD + L)x^{i+1} = b - ((1-1/w)D + R)x^i$$

```
x = np.zeros((n,1))
while np.linalg.norm(b-Ax) > eps:
 for k in range(n):
  left = sum(a[k,0:k]*x[0:k,0])
  right = sum(a[k,k+1:]*x[k+1:,0])
  x_tmp = (b[k]-left-right)/a[k,k]
  x[k] = (1-w) * x[k] + x_tmp * w
return x
```

Praktische Konvergenzkriterien

1. A strikt diaginaldominant (Für alle Spalten gilt: Betrag des Diagonalelements > Summe des Betrags der restlichen Spaltenelemente)
   ⇒ Alle drei Verfahren konvergieren.
2. A ist positiv definit (d.h alle Eigenwerte von A sind > 0)
   ⇒ SOR und Gauss-Seidel konvergieren.
3. Sind A und $D - 2A$ positiv definit so konvergiert auch das Jacobi-Verfahren.
4. A schwach-diagonaldominant (Für jede Spalte muss gelten: Betrag des Diagonalelements ≥ Summe des Betrags der restlichen Spaltenelemente) und Matrix unzerlegbar, d.h. der Graph von A ist stark zusammenhängend (jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar)
   → Alle drei Verfahren konvergieren.

Graph einer Matrix A

1. Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
2. Erstelle Graph mit n Knoten.
3. Für alle nicht null Einträge der Matrix a_{ij} der Matrix muss eine Kante von i nach j eingetragen werden.

Additive Zerlegung einer Matrix A

1. Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
2. Gesucht: Matrixzerlegung $A = L + D + R$
3. L ist linke untere Dreiecksmatrix der Einträge von A ohne Diagonale.
4. D sind nur die Diagonalelemente der Einträge von A.
5. R ist rechte obere Dreiecksmatrix der Einträge von A ohne Diagonale

Poissongleichung - Tabellenaufgabe

1. Gegeben: Tabelle mit Gitterweite h und Fehlertoleranz r
2. Gesucht: Vollständige Tabelle
3. Jacobi-Tabelle:
   (a) h gleich, r kleiner: Letzter Eintrag + Differenz der letzten beiden Einträge
   (b) h kleiner, r gleich: Letzter Eintrag * 4
4. Gauss-Seidel: Halb so viele Schritte wie Jacobi
5. SOR: Wurzel an Schritten wie Jakobi und ansonsten mit den gleichen Regeln wie Jacobi

Iterationsmatrix

1. $V_J = -D^{-1}(L+R)$
2. $V_{GS} = -(L+D)^{-1}R$
3. $V_{SOR} = -(1/wD + L)^{-1}(w-1/wD + R)$

Iterative Verfahren Allgemein

Newton-Verfahren

→ Konvergiert nur für Startwerte nahe der Nullstelle
→ Konvergiert sehr schnell (quadratisch)
Gegeben: Funktion $f(x)$ und Startwert x_0

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Newton-Verfahren im R^n

1. Gegeben: Funktion f(x) und Startwerte x_0
2. Hierfür wird mit dem Gradientenverfahren die Jacobi-Matrix berechnet.

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = x_i - (J(x_i))^{-1} f(x_i)$$

Sekanten-Verfahren

1. Konvergiert nur für Startwerte nahe der Nullstelle
2. Konvergiert schnell
3. Gegeben: zwei Startwerte x_0, x_1
4. Für x_n wird eine Gerade g zw. y_{n-1} und y_{n-2} gezogen
5. x_n ist der Schnittpunkt von g mit der x-Achse

Bisektionsverfahren

1. Konvergiert immer, aber langsam
2. Gegeben: zwei Startwerte x_0, x_1
3. Mittelpunkt x_2 bestimme und das ganze mit x_0, x_2 wiederholen, falls $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$, ansonsten mit x_1, x_2 wiederholen

Regula falsi

1. Bisektionsverfahren, nur statt dem Mittelpunkt x_2 zw. x_0, x_1 nimmt man den Schnittpunkt der Geraden zw. x_0, x_1 mit der x-Achse

Hinweis - Ausgelassen

Banachscher Fixpunktsatz, weil der halt echt kacke in den Folien erklärt ist. Sagt einem, dass das Verfahren Konvergiert

Numerische Integration / Quadratur

Newton-Cotes-Formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

Rechtecksregel:

1. Gegeben: Sample Punkt x_0
2. Linksregel: $x_0 = a$ bzw. Rechtsregel: $x_0 = b$
3. Mittelpunktregel: $x_0 = {}^{a+b}/_2$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$$

Trapezregel:

1. Gegeben: Zwei Sample Punkte: a, b

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(a)-f(b)}{2}$$

Partition:

1. obrige Regeln auf Teilmengen anwenden
2. Alle Zwischenergebnisse addieren

Romberg-Verfahren:

1. Vergleich zweier Verfahren
2. Gegeben: Schrittweite h (Abstand zw. Punkten)

$$T_f^1(h) = \frac{4 \cdot (\text{ Result klein h }) - (\text{ Result groß h })}{3}$$

Nichtlineare Optimierung

Optimierung mittels Newton-Verfahren

1. Abstiegsverfahren, falls $\nabla^2 f(x')$ positiv definit
2. Sehr aufwändig für große n
3. Hesse-Matrix: In der Diagonalen 2 mal nach Variable abgeleitet, ansonsten einmal nach Zeilen und einmal nach Spalten Variable

$$x_{i+1} = x_i - [\nabla^2 f(x_i)]^{-1} \nabla f(x_i)$$

Gradientenverfahren / Steepest descent

1. Gegeben: Startwert x_0 und Schrittweite t_0
2. Abstiegsverfahren, falls $\nabla f(x_i)^T s_i < 0 \Rightarrow s_i = -\nabla f(x_i)$
3. Optimale Schrittweite t kann näherungsweise durch das Lösen von $f_i(t) = f(x_i + ts_i)$ bestimmt werden.

$$x_{i+1} = x_i + t_i s_i$$

Konjugiertheit zweier Vektoren zu A

1. Gegeben: Matrix A und 2 Vektoren u,v
2. A-konjugiert, falls $u^T Av = 0$

Abbruchbedingungen

1. Maximale Anzahl an Iterationsschritte gemacht
2. Gewünschte Genauigkeit erreicht