ALGOKS FRAGESTUNDE

Singulärwertzerlegung (SVD)

Matrix M orthogonal
$\Updownarrow$
$M^{-1} = M^T$

Nochmal kurz zur Wiederholung:

Definition (SVD)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, eine Matrix, so ist eine Singulärwertzerlegung (SVD) von A eine Faktorisierung

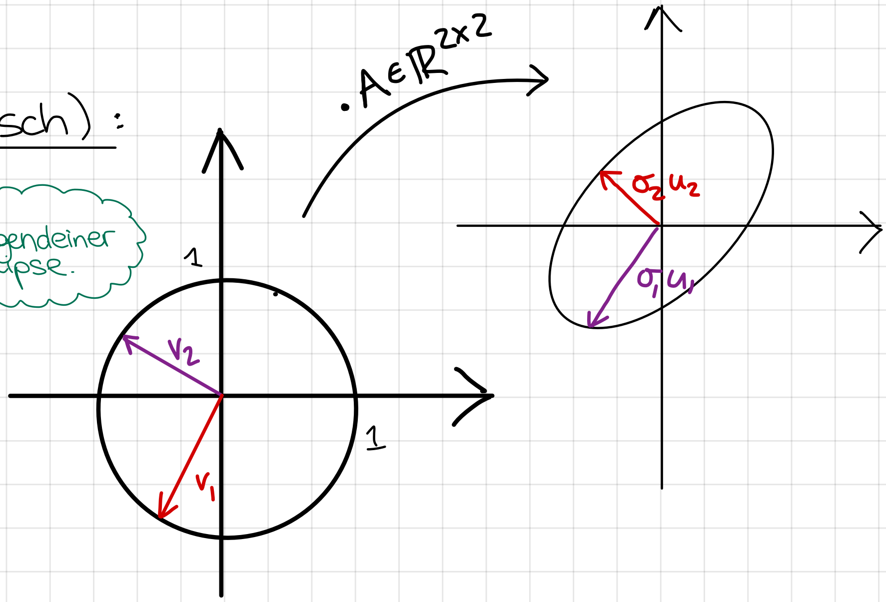
$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

Σ

in die orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und die Diagonalmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$, s.d. für alle $1 \leq i < \min(m,n)$ gilt $\Sigma_{ii} \geq \Sigma_{i+1,i+1} \geq 0$.

Interpretation (geometrisch):

Das Bild der Einheitssphäre unter irgendeiner $n \times m$-Matrix ist eine Hyperellipse.



Berechnung:

1. Berechnung der Singulärwerte σ_i: Wurzeln der EW von A^TA oder AA^T.

2. Berechnung der Rechts- / Linkssingulärvektoren über zugehörige Eigenvektoren von A^TA / AA^T. (V, U)

3. Berechnung der Links- / Rechtssingulärvektoren über Formel:

$$A \cdot v_i = \sigma_i u_i \quad \text{und} \quad A^T u_i = \sigma_i v_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq \min(n,m).$$

+ Rest über Orthonormalbasis.

Frage 1

Die Sortierung der Spalten von U/V ist egal...

Antwort:

NEIN!

FRAGE 2

Eine Singulärwertzerlegung, bitte!

ANTWORT:

SVD von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- AA^T, A^TA:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① Singulärwerte:

$\rightarrow$ EW von AA^T sind „leicht" abzulesen: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\Rightarrow$ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$ (Singulärwerte von A).

② Linkssingulärvektoren:

$\rightarrow$ EV von AA^T: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (sehen bzw. ausrechnen)

③ Rechtssingulärvektoren:

$$\rightsquigarrow v_1 = \frac{1}{\sigma_1} \cdot A^T u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} \cdot A^T u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\rightsquigarrow V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FRAGE 3

WS 18/19: Aufgabe 7c

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -16 & -9 \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Suche nach Σ, s.d.

$$B = U\,\Sigma \cdot V^T \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma = U^T \cdot B \cdot V$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \Sigma \cdot V^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}}^{=\Sigma \cdot V^T} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\sigma_1 & -4\sigma_2 \\ -4\sigma_1 & -3\sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -16 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 4, \quad \sigma_2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Tausche 3. mit 1. Zeile}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Tausche 3 mit 1. }\cancel{\text{Zeile}}\text{ Spalte}}$$

Von der Matrix A sei die Singulärwertzerlegung bekannt:

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 & -8 \\ -20 & -6 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{V^T}$$

a) Bestimmen Sie von A den Rang, sowie die Konditionszahl κ_2 bezüglich der Spektralnorm $||.||_2$.

<u>Rang:</u> Entspricht Anzahl zu Null verschiedener Singulärwerte:

rang $A = 2$

<u>Konditionszahl κ_2:</u>

$$\kappa_2 = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{5}{2}$$

$$A^{-1} = V \cdot \Sigma^{-1} \cdot U^T$$

$$\kappa_F(A) = \|A\|_F \cdot \|A^{-1}\|_F = \sqrt{5^2+2^2} \cdot \sqrt{(1/5)^2+(1/2)^2}$$

PLR

FRAGE 4

Was tun bei mehreren "id." Elementen?

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$ $\rightsquigarrow$ Pivotelement? egal, am besten nicht permutieren

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$ $\rightsquigarrow$ Pivotelement? egal, wähle eines davon.

wenn P symm. dann egal.

$$Ax = b \iff PLRx = b \iff L(\overbrace{Rx}^{y}) = P^T b$$

$$\Rightarrow \boxed{Rx = y}$$

Norm & Lineare Algebra

Frage 5

SS 2018 - Aufgabe 7d

Funktion $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x_1| + |x_2|$.

Ist f eine Norm?

r $\quad$ Bh., f ist eine Norm;

Ad 1) Pos. Def.: $\quad$ Sei $x \in \mathbb{R}^2$ bel.

$$f(x) = \underbrace{|x_1|}_{\geq 0} + \underbrace{|x_2|}_{\geq 0} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$f(x) = |x_1| + |x_2| = 0 \iff \underbrace{|x_1|}_{\geq 0} = - \underbrace{|x_2|}_{\geq 0} = 0$$

$$\iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = \vec{0}.$$

Ad 2) (Homogenität) $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x) = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda| \cdot \left(|x_1| + |x_2| \right) = |\lambda| \cdot f(x)$$

Ad 3) (Δ-Ugl.) $\quad f(x+y) = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|$

$$\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = f(x) + f(y).$$

$|\cdot|$ ist Norm auf $\mathbb{R}$

Aufgabe 7 — Lineare Algebra (14 Punkte)

Von der Matrix A sei die Singulärwertzerlegung bekannt:

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 & -8 \\ -20 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Rang, die Konditionszahl κ_2 bezüglich der Spektralnorm $||.||_2$ und die Eigenwerte von AA^T.

rang $A = 2$

EW von AA^T: $\lambda_1 = 5^2 = 25$ $\lambda_2 = 2^2 = 4$

b) Geben Sie die Definitionen der Spektralnorm $||\cdot||_2$, der Zeilensummennorm $||\cdot||_\infty$ und der Frobeniusnorm $||\cdot||_F$ an und bestimmen Sie $||A||_2$, $||A||_\infty$ und $||A||_F$.

$$||M||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(M^TM)} = \sigma_1$$

$$||A||_2 = 5$$

$$||M||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2} = ||\sigma||_2$$

$$||A||_F = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$||M||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |M_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max\left\{\frac{15}{5}+\frac{8}{5}, \frac{20}{5}+\frac{6}{5}\right\} = 5\frac{1}{5}$$

Aufgabe 7 — Lineare Algebra (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A_α für $\alpha = 0$ und $\alpha = 2$.

~~A_0~~ A_0: 1, 2, 4

b) Definieren Sie die Kondititionszahl κ und geben Sie diese für A_0 an.

falls A nicht sing.

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\kappa_\infty(A_0) = \kappa_\infty\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{4}_{\|A\|_\infty} \cdot \underbrace{1\tfrac{1}{2}}_{\|A^{-1}\|_\infty} = 6$$

$\underline{\kappa_2}$: A diagonalisierbar $\Rightarrow$ SVD ist Eigenwertzerlegung

$\Rightarrow \sigma_1 = 4, \ \sigma_2 = 2, \ \sigma_3 = 1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \kappa_2(A) = 4$$

c) Geben Sie an, ob die Matrix A_0 singulär ist und ob die Matrix A_2 singulär ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

A_0 ist nicht-singulär

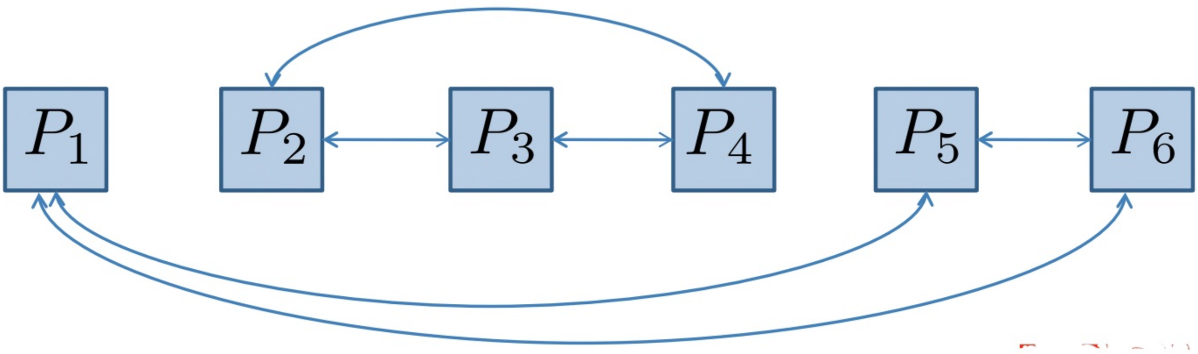
A_2 ist singulär

Graphen

Matrizen und Graphen

- **Anwendung:**
  Graph zu beliebiger Matrix

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$



Warum nicht mit sich selbst verbunden?

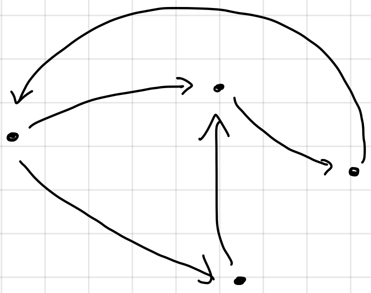
→ je nach Definition lässt man „Schleifen" nicht zu bei Graphen. (sonst. wahrscheinlich Fehler)

FRAGE 6

Wann ist Graph zusammenhängend?

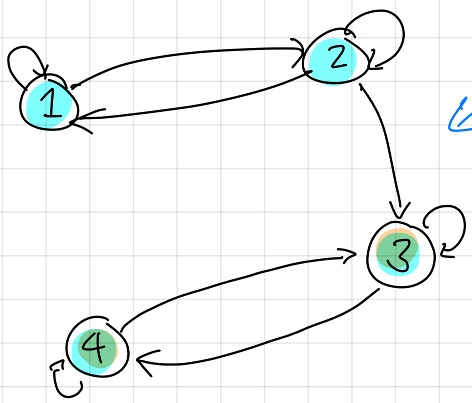
Gerichteter Graph G heißt STARK ZSHGD., wenn es zwischen zwei bel. Knoten $v, w \in G$, sowohl einen Pfad $v \to \ldots \to w$, als auch $w \to \ldots \to v$ gibt.

Bsp.:



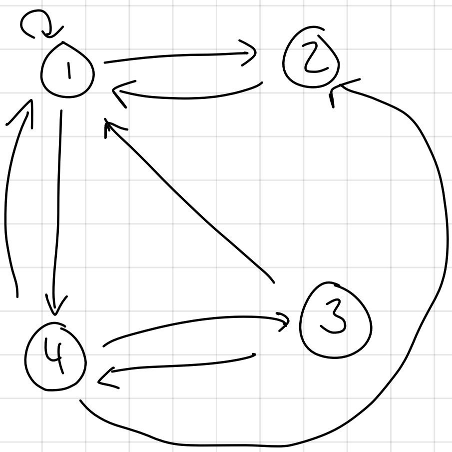
Kurz: Von jd. Knoten kommt man zu jd. anderen Knoten.

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \quad \rightsquigarrow$$



schwach zshgd.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

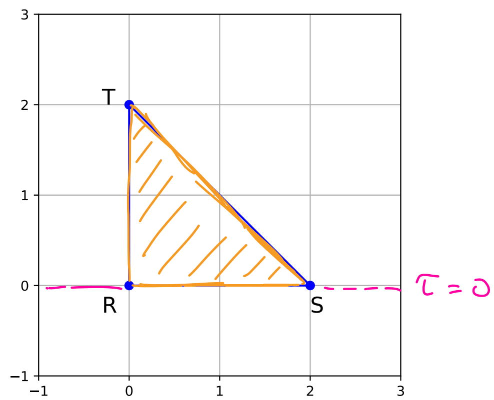


stark zshgd.

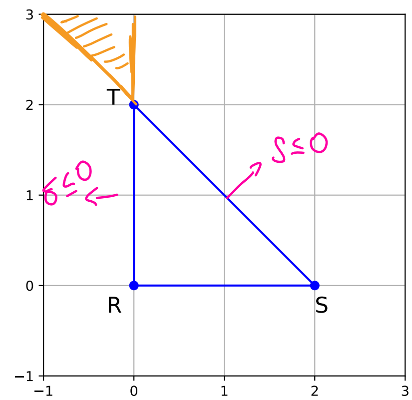
Aufgabe 3 — Baryzentrische Koordinaten (7 Punkte)

Im Folgenden ist ρ das Gewicht von R, σ das Gewicht von S und τ das Gewicht von T.

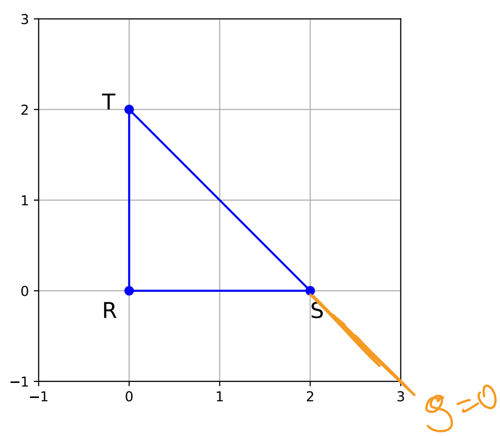
a) Zeichnen Sie die Bereiche in die Skizzen ein für die die gegebenen Gewichte gelten.



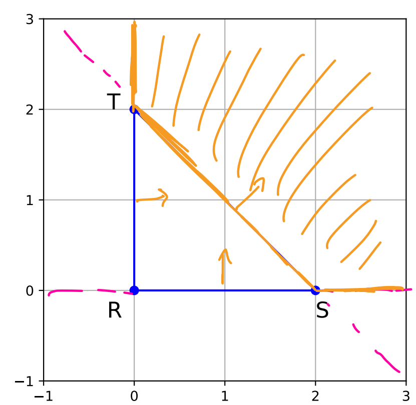
$\rho \geq 0 \quad \wedge \quad \sigma \geq 0 \quad \wedge \quad \tau \geq 0$



$\rho \leq 0 \quad \wedge \quad \sigma \leq 0 \quad \wedge \quad \tau \geq 0$



$\rho = 0 \quad \wedge \quad \sigma \geq 0 \quad \wedge \quad \tau \leq 0$



$\rho \leq 0 \quad \wedge \quad \sigma \geq 0 \quad \wedge \quad \tau \geq 0$

b) Berechnen Sie bezüglich des Dreiecks mit den Koordinaten $R = [-2, 0]^T, S = [0, -1]^T, T = [2, 2]^T$ die Koordinaten für die Punkte P_1, P_2, P_3 mit folgenden baryzentrischen Koordinaten

	ρ	σ	τ
P_1	0.5	0.25	0.25
P_2	-1	$2/3$	$1/3$
P_3	0	$1/3$	$2/3$

P_2, P_3 analog

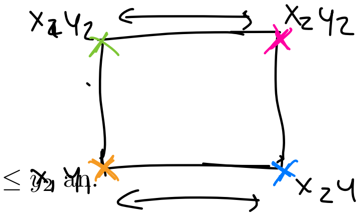
$$P_1 = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\rho} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{S} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\tau} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} //$$

Aufgabe 3 — Interpolation (11 Punkte)

a) Beschreiben Sie knapp den Unterschied zwischen *Interpolation* und *Approximation*.

b) Lagrange Polynome Geben Sie die drei Lagrangepolynome $L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ zu den Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$ an. Vereinfachen Sie die Darstellung so weit wie möglich.

c) Bilineare Interpolation Gegeben ist ein rechteckiges Gebiet, das in x-Richtung durch x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ und in y-Richtung durch y_1 und y_2 mit $y_1 < y_2$ begrenzt ist. An den Ecken sind folgende Werte gegeben:



Ecke	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)	(x_2,y_1)	(x_2,y_2)
Wert	v_{11}	v_{12}	v_{21}	v_{22}

Geben Sie die bilineare Interpolationsfunktion $f(x,y)$ für $x_1 \le x \le x_2$ und $y_1 \le y \le y_2$ an.

$$\rightarrow f(x,y_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \overbrace{f(x_1,y_1)}^{v_{11}} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} v_{21}$$

$$f(x,y_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot v_{12} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot v_{22}$$

$$f(x,y) = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x,y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x,y_2)$$

$x_1 = 2$ $y_1 = 3$ $x = 3$, $y = 4$

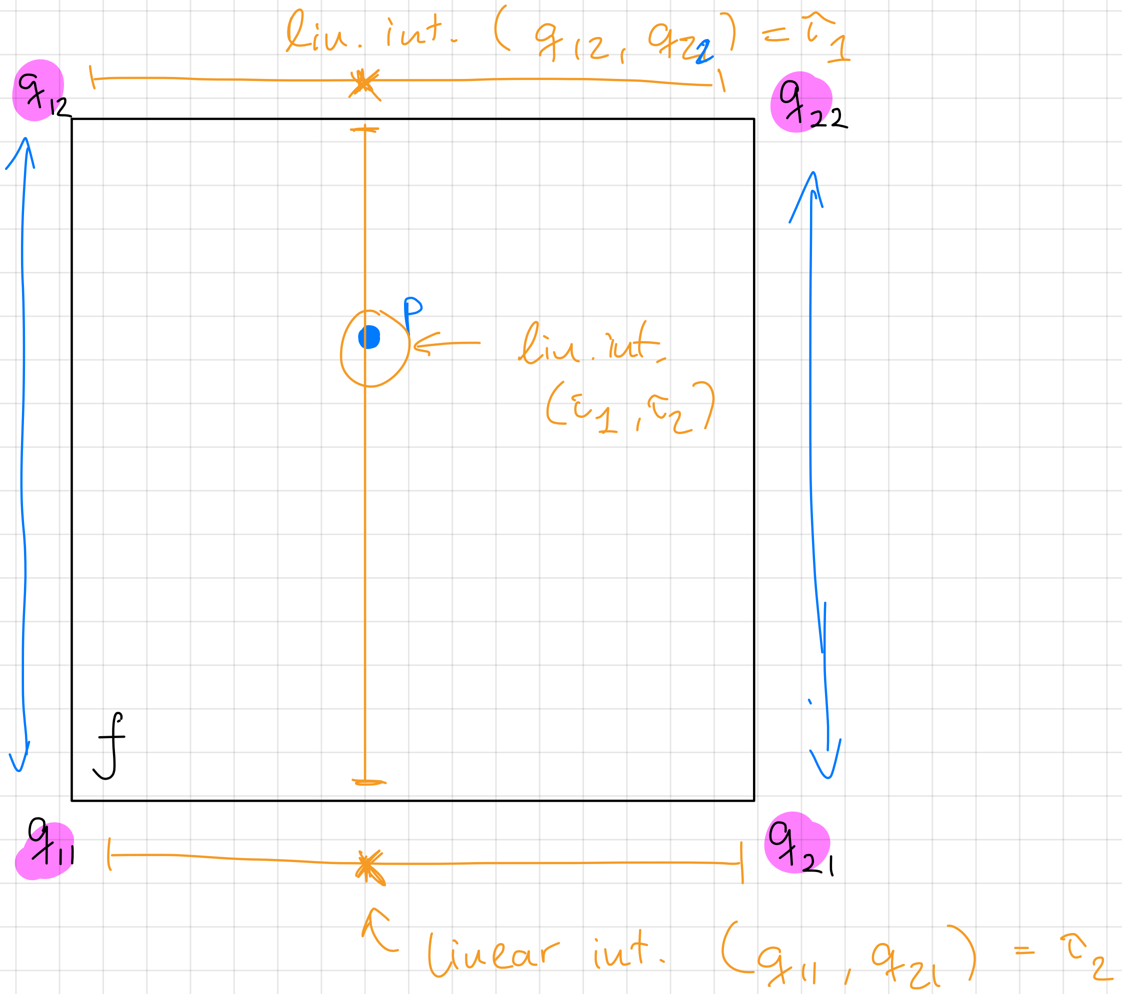
$x_2 = 4$ $y_2 = 5$ $v_{11} = 10$ $v_{12} = 20$ $v_{21} = 30$ $v_{22} = 40$

$$\rightarrow f(x,3) = \frac{4-x}{2} \cdot 10 + \frac{x-2}{2} \cdot 30 \overset{x=3}{=} 5 + 15 = 20$$

$$f(x,5) = \frac{4-x}{2} \cdot 20 + \frac{x-2}{2} \cdot 40 \underset{x=3}{=} 10 + 20 = 30$$

$$\Rightarrow f(3,4) = \frac{5-4}{2} \cdot 20 + \frac{4-3}{2} \cdot 30 = 10 + 15 = \underline{\underline{25}}$$

Bilineare Interpolation



Aufgabe 8 — Nichtlineare Optimierung (10 Punkte)

a) Sie versuchen das Minimum der folgenden Funktion zu bestimmen

$$F(x, y) = 2x^2y^2 + 3x^2 - 3x + 2y^3 + y^2 + 3y - 1$$

Berechnen Sie die Jacobi- und die Hessematrix von $F(x, y)$.

$$J_F = \begin{pmatrix} 4xy^2 + 6x - 3 \\ 4yx^2 + 6y^2 + 2y + 3 \end{pmatrix}^T$$

$$HF = \begin{pmatrix} 4y^2 + 6 & 8yx \\ 8yx & 4x^2 + 12y + 2 \end{pmatrix}$$

b) Rechnen Sie nun mit folgender Jacobi und Hessematrix weiter:

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 6xy + 6x - y^2 - 4 \\ 3x^2 - 2xy + 3 \end{bmatrix}^T$$

$$H_F(x,y) = \begin{bmatrix} 6x + 6y + 6 & 6x - 2y \\ 6x - 2y & -2x \end{bmatrix}$$

Führen Sie einen Schritt des Gradientenverfahrens mit Startwert $\overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{=x_0}$ und Schrittweite $t = 0.5$ durch.

$$x_1 = x_0 - t \cdot \nabla F(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 + 12 + 6 - 4 - 4 \\ 3 - 4 + 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\,1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Rechnen Sie nun mit folgender Jacobi und Hessematrix weiter:

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy + 8x - y^2 - 4 \\ 3x^2 - 2xy + 4 \end{bmatrix}^T$$

$$H_F(x,y) = \begin{bmatrix} 6y+8 & 6x-2y \\ 6x-2y & -2x \end{bmatrix}$$

Außerdem ist gegeben

$$J_F(1,3) = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens durch. Wählen Sie als Startwert $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Hinweis: Gesucht ist das Minimum von F , nicht die Nullstellen.

$$x_1 = x_0 - (\mathcal{H}_F(1,3))^{-1} \cdot J_F(1,3)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/26 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 13/26 \\ 3 + 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3\,1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 — Optimierung mit Nebenbedingungen (7 Punkte)

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Lösung von Optimerungsproblemen mit Nebenbedingungen unter Verwendung des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren. Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ soll unter der Nebenbedingung $g(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$ maximiert werden.

a) Bestimmen Sie $\mathbf{grad}(f)(x, y)$ und $\mathbf{grad}(g)(x, y)$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$$

b) Stellen Sie unter Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren das Gleichungssystem für die drei Unbekannten x, y und dem Lagrange-Multiplikator λ auf.

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{bmatrix}$$

$$2x = \lambda \cdot 2(x-1) = 2\lambda x - 2\lambda$$

$$2y = \lambda \cdot 2y = 2\lambda y$$

$$(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

FRAGE 7

Newton-Verfahren: Schrittweite

Schrittweite ist 1.

Suchrichtung hat Inverses

$\longrightarrow$ LGS bei $n > 3$.

FRAGE 8

Newton-Verfahren Min $\longleftrightarrow$ nD-Newton Nullstellen

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow$ Newton-Verf. für Min.: $x_{i+1} = x_i - \mathcal{H}_f(x_i)^{-1} \nabla f(x_i)$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow$ nD-Newton für Nullstelle: $x_{i+1} = x_i - \mathcal{J}_g(x_i)^{-1} \nabla g(x_i)$

FRAGE 9

Genaue Differenzierung der Matrizen

$\nabla f \leftarrow$ Gradient $\rightsquigarrow$ quasi Jacobi-Matrix für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\mathcal{J}_f \leftarrow$ Jacobi-Matrix für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\leftarrow$ $m \geq 1$ ($m=1$)

(erste Abl.)

$\mathcal{H}_f \leftarrow$ Hesse-Matrix für $f: \mathbb{R}^n \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$. (Zweite Abl.)

Iterative Verfahren

Frage 10

Gauß-Seidel, SOR, Jacobi

Alles sind iter. Verf. zum Lösen von LGS:

Jacobi: (Gesamtschritt) $\quad V_J = -D^{-1}(L+R) \quad ||$

Hierbei wird erst nach einem gesamten Schritt mit den neuen Werten weitergerechnet

$$x_i^{m+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^m\right)$$

x^m

noch alte Werte

Gauß-Seidel: (Einzelschritt) $\quad V_{GS} = -(L+D)^{-1} R \quad ||$

Hierbei wird sofort mit den neuen Werten weitergerechnet

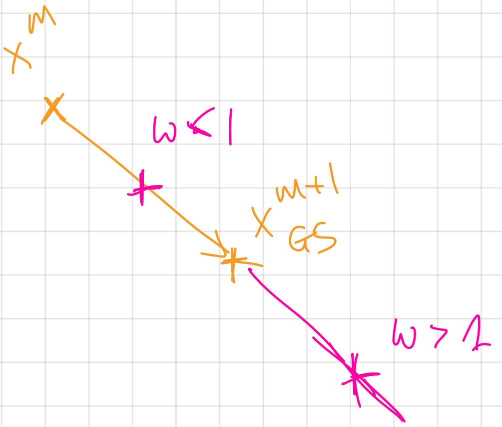
$$x_i^{m+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{m+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^m\right)$$

schon neue Werte

SOR: (sukzessive Überrelaxation) $\quad V_{SOR} = -\left(\frac{1}{\omega}D + L\right)^{-1}\left(\frac{\omega-1}{\omega}D + R\right)$

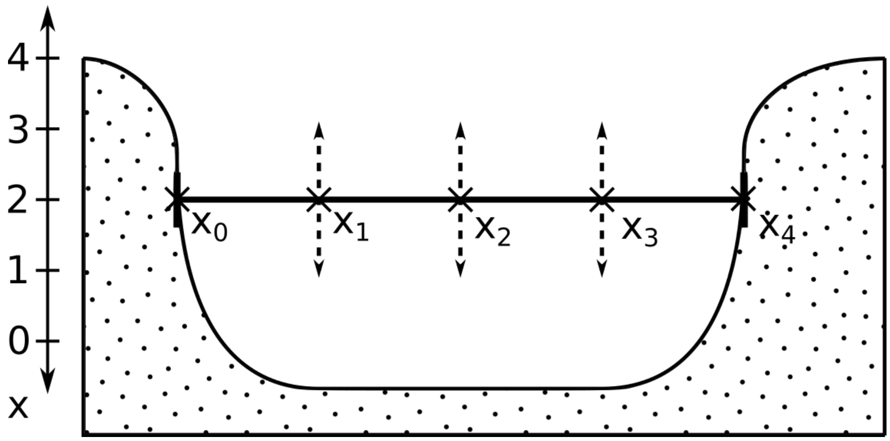
Über-/Unterschieße den eig. Zielwert von GS:

$$x_i^{m+1} = (1-\omega)\, x_i^m + \frac{\omega}{a_{ii}} \underbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{m+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^m\right)}_{\text{Gauß-Seidel}}$$



Aufgabe 6 — Numerik in der Praxis (9 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Auslenkung einer Brücke zu bestimmen. Der Einfachheit halber modellieren Sie Ihre Brücke durch nur 5 diskrete x-Koordinaten $x_0, \dots, x_4$.



a) Gleichungssystem Aufstellen Aus einem alten Buch über Brückenbau entnehmen Sie folgende Formel für die Koordinaten der inneren Punkte ihrer Brücke.

$$f_i - 3x_i + 2x_{i+1} + x_{i-1} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

Aus Ihren Messungen kennen Sie die Randwerte $x_0 = x_4 = 4$, sowie die zu erwartende Belastung der Brücke $f_1 = -1$, $f_2 = -4$, $f_3 = -3$. Stellen Sie nun das zugehörige Gleichungssystem auf:

$$\begin{bmatrix} \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{bmatrix}$$

b) Konvergenz Sie beschließen zur Lösung eines ähnlichen Problems den SOR Algorithmus zu verwenden. Für welche Werte von ω ist die Konvergenz des SOR-Verfahrens garantiert, wenn A eine positiv definite Matrix ist?

$\omega \in (0,2)$.

$\omega = 3/2 \qquad a_{ii} = 2$

$\frac{\omega}{a_{ii}} = 3/4$

c) Gleichungssystem Lösen Sie wollen nun den SOR Algorithmus auf folgendes Gleichungssystem anwenden:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6.5 \\ -9 \end{bmatrix} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die erste Iteration des SOR Verfahrens mit dem Startwert $\mathbf{x}^0 = [x_1, x_2, x_3]^T = [1,1,1]^T$ und $\omega = 1.5$ durch. Verwenden Sie als Relaxationsreihenfolge $x_1 \to x_2 \to x_3$. Geben Sie den resultierenden Vektor $\mathbf{x}^1$ an.

$$x_i^{m+1} = (1-\omega)\, x_i^m + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{m+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^m \right)$$

$$x_1^1 = -1/2 \cdot 1 + \frac{3}{2 \cdot 2} \left(3 - \cancel{0} - (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 1 \right)$$

$$= 3 - \frac{1}{2} = 2\,1/2$$

$$x_2^1 = -1/2 \cdot 1 + \frac{3}{4} \left(6\,1/2 - (-1) \cdot 2\,1/2 - (-1) \cdot 1 \right)$$

$$= \frac{30}{4} - \frac{2}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$x_3^1 = -1/2 \cdot 1 + \frac{3}{4} \left(-9 - 0 \cdot 2\,1/2 - (-1) \cdot 7 \right)$$

$$= -\frac{6}{4} - 1/2 = -2$$

$$\Rightarrow \quad x^1 = \begin{pmatrix} 2\,1/2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad //$$

QR-ZERLEGUNG

StudOn - Blatt 2, A5 - Rotationsmatrix I

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad S \text{ Drehung, s.d. } S \cdot A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Givens-Rotationen:

$$c = \frac{9}{\sqrt{9^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{90}}$$

$$s = \frac{-\operatorname{sgn}(9)\cdot 3}{\sqrt{9^2+3^2}} = -\,{}^{3}/_{\sqrt{90}}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/\sqrt{90} & 3/\sqrt{90} \\ -3/\sqrt{90} & 9/\sqrt{90} \end{pmatrix}$$

$$S \cdot A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{90}} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right.$$

WS15/16, Aufgabe 2b)

$w \in \mathbb{R}^n$

$$H_w = \mathbb{1}_n - 2 \cdot \frac{w w^T}{\|w\|_2^2}$$

$$w = \underset{\sim}{x} - \|x\|_2 \cdot e_1$$

↑

Spaltenvektor von A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto w = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{(4 + 16 + 16)^{1/2}}_{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PCA – WS15/16 – Aufg. 10b)

$$\begin{array}{r} 64 \\ 28 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)^2 = 9 \quad \Rightarrow 4-\lambda = \pm 3$$

EW: $\quad P_\lambda(B) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2 - 9$

$$= 16 - \cancel{4}8\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 7$$

NSt.: $\quad \lambda_{1/2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = 4 \pm 3$

$$\longrightarrow \quad \lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 1$$

EV: $\quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{q}_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto \quad q_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$