BFS-Reduktions Cheat-Sheet

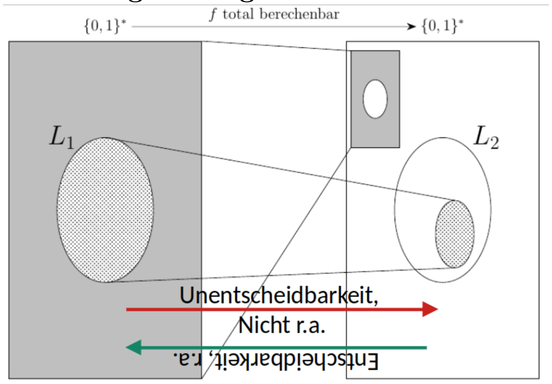
1 Reduktion

Gegeben:

- eine Sprache L
- die auf H reduziert werden soll

$\Rightarrow\ H \leq L$

Vererbung von Eigenschaften



Positive Eigenschaften vererben sich von rechts nach links und negative von links nach rechts.

1.1 Funktion $f(x)$ definieren

$$f(x) = \begin{cases} \overbrace{<\mathrm{FM}_{\lhd M \rhd \mathrm{w}}>A}^{=\ \lhd M \rhd w \in L} & x = <\mathrm{M}>\ w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion $f(x)$ ist total da es einen sonst Fall gibt, und berechenbar, da $<\mathrm{M}>w$ durch Syntaxanalyse entschieden werden kann.

(A steht für eine beliebige Eingabe, die nachher bei der Definition von $<\mathrm{FM}_{\lhd M \rhd \mathrm{w}}>$ wichtig wird, damit $FM_{\lhd M \rhd w} \in L$ gilt.)

1.2 Neue TM $FM_{\lhd M \rhd w}$ definieren

1. Sei Eingabe y
2. Starte M mithilfe einer universellen TM mit Eingabe w $\quad$ ($\rightarrow$ Endlosschleife falls $x \notin H$)
3. ... weitere Definition so, dass hier nur für $FM_{\lhd M \rhd w} \in L$ gehalten wird ($x \in H\ \rightarrow\ x = <\mathrm{M}>\ w$).

1.3 Beweis der Reduktion

1. $x \notin H \land x \neq <\mathrm{M}> w\ :\ f(x) = 0 \notin L$
2. $x \notin H\ \land\ x = <\mathrm{M}> w$ und M gestartet mit Eingabe w hält nicht. Somit kehrt $FM_{\lhd M \rhd w}$ nicht aus Zeile 2 zurück und hält für beliebige Eingaben nicht. Dies entspricht nicht der Definition von L.
   Folglich ist $f(x) = <\mathrm{FM}_{\lhd M \rhd \mathrm{w}}>A \notin L$
3. $x \in H \rightarrow x = <\mathrm{M}> w$ und M gestartet mit Eingabe w hält. Somit kehrt $FM_{\lhd M \rhd w}$ aus Zeile 2 zurück.
   $f(x) = <\mathrm{FM}_{\lhd M \rhd \mathrm{w}}>A \in L$ weil ...

$\Rightarrow \quad x \in H \Leftrightarrow f(x) \in L \quad \Rightarrow H \leq L$

2 Polynomielle Reduktion

Gegeben:

- ein Problem X
- das auf eine Sprache L in polynomieller Zeit reduziert werden soll

$\Rightarrow L \leq_p X$

2.1 Funktion $f(x)$ definieren

$$f(x) = \begin{cases} A & x \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (A \text{ steht für einen beliebigen Wert der in X ist: } A \in X)$$

(Achtung: A so ausführlich wie möglich definieren, bspw.:
$A = \langle B, 1 \rangle, B = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph mit genau einem Knoten $V = \{v_1\}$ und keinen Kanten $E = \emptyset$. Dieser bildet offensichtlich eine CLIQUE/VC/Independent-Set der Größe 1.)

2.2 Polynomieller Entscheider

Im Folgenden wird angenommen, dass die Addition und Multiplikation in $\mathcal{O}(n)$ möglich sind.

Entscheider für $x \in L$:

1. Sei Eingabe y — $\mathcal{O}(1)$
2. Form prüfen die x erfüllen muss (gemäß Definition von L, z. B. besteht nur aus 0en und 1en), sonst halte verwerfend — $\mathcal{O}(...)$
3. Bedingungen prüfen die x erfüllen muss (gemäß Definition von L), sonst halte verwerfend — $\mathcal{O}(...)$
4. Halte akzeptierend — $\mathcal{O}(1)$

Damit gilt offensichtlich $L \in P$, da die Gesamtlaufzeit des obigen Entscheiders in $\mathcal{O}(...)$ liegt.
Die Funktion $f(x)$ ist total, da es einen sonst Fall gibt, und in polynomieller Zeit berechenbar, da es einen polynomiellen Entscheider für L gibt.

2.3 Beweis der Reduktion

$$x \in L \Rightarrow f(x) = A \quad \in X$$
$$x \notin L \Rightarrow f(x) = 0 \quad \notin X$$
$$\Rightarrow \quad x \in L \Leftrightarrow f(x) \in X \quad \Rightarrow L \leq_p X$$

3 Bonus: Angenommen $P = NP$

3.1 $X \leq_p L$ zeigen

$f(x) = \begin{cases} B & x \in X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (B steht für einen beliebigen Wert der in L ist: $B \in L$)

Da $X \in NP = P$ ist, gibt es einen polynomiellen Entscheider für X.
Die Funktion $f(x)$ ist total, da es einen sonst Fall gibt, und in polynomieller Zeit berechenbar, da es einen polynomiellen Entscheider für X gibt.

$$x \in X \Rightarrow f(x) = B \quad \in L$$
$$x \notin X \Rightarrow f(x) = 0 \quad \notin L$$
$$\Rightarrow \quad x \in X \Leftrightarrow f(x) \in L \quad \Rightarrow X \leq_p L$$

3.2 Zeigen, dass L dann NP-vollständig ist

1. Wie oben gezeigt ist $L \in P = NP$.
2. X ist NP-vollständig $\Rightarrow \forall L_{NP} \in NP : L_{NP} \leq_p X$
$\Rightarrow \forall L_{NP} \in NP : L_{NP} \leq_p X \leq_p L$
$\Rightarrow \forall L_{NP} \in NP : L_{NP} \leq_p L$

$\Rightarrow L$ ist NP-vollständig