Aussagenlogik

Grundbegriffe

Atome A, B, C, …
Nicht weiter zerlegbare Aussage. Kann wahr (⊤) oder falsch (⊥) annehmen. Bsp.: „es Regnet“

Wahrheitsbelegungen κ
κ: $\mathcal{A} \mapsto \{\top, \bot\}$ ist eine Abbildung, d.h. κ ordnet Atomen konkrete Wahrheitswerte (⊤, ⊥) zu. Könnte z.B. sein: κ[esRegnet] = ⊤, κ[istAugust] = ⊥

Prädikate P, Q, R, …
Bsp.: „istKleiner(x, y)“. Ein Prädikat macht eine Aussage über Individuen (hier x und y) und gibt einen Wahrheitswert (⊤, ⊥) zurück, wenn es ausgewertet wird.
0-stelliges Prädikat ≡ Atom

Funktionen f, g, h, …
z.B. „mutter(x)“ gibt ein Objekt / ein Individuum zurück (hier die Mutter von x).
0-stellige Funktion ≡ Konstante

Terme D, E, F, …
Ein Term ist eine Instanz der Grammatik
$T ::= x \mid c \mid f\,(T, \ldots, T)$ (x: Variable, c: Konstante, f: Funktion)
Ergebnis der Auswertung eines Terms ist ein Objekt / Individuum.

Formeln ϕ, ψ, …
Eine Formel ist eine Instanz der Grammatik
$\phi, \psi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \rightarrow \psi \mid \forall x(\phi) \mid \exists x(\phi)$ (t: Term, x: Variable)
Ergebnis der Auswertung einer Formel mittels einer Wahrheitsbelegung ist ein Wahrheitswert

Aristotelische Formen

Alle Ps sind Qs:	$\forall x.\ P(x) \rightarrow Q(x)$	„∀ mit →“
Einige Ps sind Qs:	$\exists x.\ P(x) \wedge Q(x)$	„∃ mit ∧“

Einige Äquivalenzen

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)$

Negationsnormalform (NNF)

Formel in NNF, wenn “¬” nur vor Atomen vorkommt.
Jede Formel hat eine NNF.

NNF aus Formel erzeugen:

$\neg\neg\phi \equiv \phi$ (Negation aufheben)

$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$ (De Morgan)
$\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$ (De Morgan)

$\neg\top \equiv \bot$, $\neg\bot \equiv \top$

Konjunktive Normalform (CNF)

Beispiel: $(A \lor B \lor \neg C) \land (\neg A \lor C) \land (\neg A \lor \neg B)$
Jede Formel ϕ hat eine CNF.

<u>CNF aus Grammatik erzeugen:</u>

Literal:	L	$::= A \mid \neg A$	(A ist Atom)
Klausel:	C	$::= \bot \mid neC$	(leere Klausel $\equiv \bot$)
	neC	$::= L \mid L \lor neC$	
CNF:	ϕ	$::= \top \mid \psi$	(leere CNF $\equiv \top$)
	ψ	$::= C \mid C \land \psi$	

<u>CNF aus NNF erzeugen:</u>

$CNF(\phi \land \psi)$	$= CNF(\phi) \land CNF(\psi)$	
$CNF((\phi \land \psi) \lor \lambda)$	$= CNF(\phi \lor \lambda) \land CNF(\psi \lor \lambda)$	(Distributivgesetz)
$CNF(\phi \lor (\psi \land \lambda))$	$= CNF(\phi \lor \psi) \land CNF(\phi \lor \lambda)$	(Distributivgesetz)
$CNF(\phi)$	$= \phi$	(wenn ϕ Klausel, d.h. kein „$\land$“ enthält)

Disjunktive Normalform (DNF)

<u>DNF aus NNF erzeugen:</u>

$DNF(\phi \lor \psi)$	$= DNF(\phi) \lor DNF(\psi)$	
$DNF((\phi \lor \psi) \land \lambda)$	$= DNF(\phi \land \lambda) \lor DNF(\psi \land \lambda)$	(Distributivgesetz)
$DNF(\phi \lor (\psi \land \lambda))$	$= DNF(\phi \land \psi) \lor DNF(\phi \land \lambda)$	(Distributivgesetz)
$DNF(\phi)$	$= \phi$	(wenn ϕ kein $\lor$ enthält)

<u>Prädikatenlogik (Logik 1. Stufe)</u>

Einige Äquivalenzen

$\neg \forall y(\phi) \equiv \exists y(\neg \phi)$
$\forall y(\phi) \equiv \neg \exists y(\neg \phi)$

Freie Variablen

= Variablen, die durch keinen Quantor gebunden sind

<u>Berechnung der Menge der FV:</u>

$FV(x)$	$= \{x\}$
$FV(\neg \phi)$	$= FV(\phi)$
$FV(E = D)$	$= FV(E) \cup FV(D)$
$FV(\phi \land \psi)$	$= FV(\phi) \cup FV(\psi)$
$FV(f(E_1, \ldots, E_n))$	$= \bigcup_{i=1}^{n} FV(E_i)$
$FV(P(E_1, \ldots, E_n))$	$= \bigcup_{i=1}^{n} FV(E_i)$
$FV(\forall x(\phi))$	$= FV(\phi) \setminus \{x\}$

Daraus folgt weiterhin:

$FV(\phi \lor \psi)$	$= FV(\phi) \cup FV(\psi)$
$FV(\exists x(\phi))$	$= FV(\phi) \setminus \{x\}$

Substitution

$\sigma = [E_1/x_1, \ldots, E_n/x_n]$ (ersetzt jeweils alle Var. x_i durch Term E_i, ließ „E_i statt x_i")

Berechnung von $\phi\sigma$: (Substitution σ angewendet auf Formel ϕ)

$x\sigma$	$= \sigma(x)$	
$f(E_1, \ldots, E_n)\sigma$	$= f(E_1\sigma, \ldots, E_n\sigma)$	f kann Funktion oder Prädikat sein.
$(E = D)\sigma$	$= (E\sigma = D\sigma)$	
$(\neg\phi)\sigma$	$= \neg(\phi\sigma)$	
$(\phi \land \psi)\sigma$	$= (\phi\sigma \land \psi\sigma)$	
$(\phi \lor \psi)\sigma$	$= (\phi\sigma \lor \psi\sigma)$	
$(\forall x(\phi))\sigma$	$= \forall y(\phi\sigma')$	*
$(\exists x(\phi))\sigma$	$= \exists y(\phi\sigma')$	*

* Wobei $\sigma'(x)=y$, für alle anderen $z \neq x$ bleibt $\sigma'(z)=\sigma(z)$. Wähle y so, dass $y \notin FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x(\phi)$ bzw. $\exists x(\phi))$! **Kurz gesagt**: Alle freien Var. in den Ersetzungen der freien Var. der linken Seite nicht als y wählen! Wenn erlaubt, wähle als y einfach komplett neuen Var.-Namen.

Pränexe Normalform (PNF)

Alle Quantoren $Q_n \in \{\forall, \exists\}$ stehen am Anfang der Formel: $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n(\phi)$

PNF aus NNF erzeugen:

$\phi \land \exists x(\psi) \equiv \exists x(\phi \land \psi)$ $\quad$ $\phi \land \forall x(\psi) \equiv \forall x(\phi \land \psi)$
$\phi \lor \exists x(\psi) \equiv \exists x(\phi \lor \psi)$ * $\quad$ $\phi \lor \forall x(\psi) \equiv \forall x(\phi \lor \psi)$ *

- nur falls $x \notin FV(\phi)$. Dies kann durch Umbenennung erreicht werden (alle gebundenen Variablen müssen eindeutig benannt werden):
  Wende $[\tilde{x}/x]$ auf den Quantifizierten Teil an. Bsp.: $\phi \lor \exists x(\psi) \Rightarrow \phi \lor \exists\tilde{x}(\psi[\tilde{x}/x])$
- Verschachtelte Quantoren behalten ihre Reihenfolge

Außerdem: $\forall x(P(x)) \land \forall x(Q(x)) \land \ldots \equiv \forall x\,(P(x) \land Q(x) \land \ldots)$

- Existenzquantoren $\exists$ so weit wie möglich nach vorne

Skolemform

= PNF ohne „$\exists$", nur mit „$\forall$"

Nicht zu jeder Formel existiert eine Skolemform. Allerdings lässt sich zu jeder Formel eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Skolemform berechnen.

ϕ und ψ erfüllbarkeitsäquivalent $\leftrightarrow$ (ϕ erfüllbar $\leftrightarrow$ ψ erfüllbar)
(Also die eine Formel erfüllbar gdw. die andere erfüllbar)

Skolemisierung: $\exists x(\phi)$ erfüllbar $\leftrightarrow$ $\phi[c/x]$ (c frisch) erfüllbar

Skolemform aus PNF erzeugen:

$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y(\varphi) \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi[f_y(x_1, \ldots, x_n)/y])$ erschöpfend anwenden

Bei Existenzquantoren $\exists$: Für jedes $\exists y(\varphi)$ eine neue Skolem-Funktion f_y einführen. Diese hat als Parameter alle $\forall$-Quantifierten Variablen links vom zu eliminierenden „$\exists$" (also **nicht** die $\exists$-Quantifizierten). Falls keine „$\forall$"s vor dem zu eliminierenden „$\exists$" stehen, ist f_y von eine nullstellige Funktion: Skolem-Konstante.

Klauselform

Sei $\psi \coloneqq Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n(\phi)$ ein Skolemform (d.h. alle Q_n sind „∀“s). Wenn ϕ in CNF gebracht wurde, kann man die führenden „∀“s weglassen (bzw. implizit annehmen) und ϕ als Klauselmenge schreiben.

Unifikation

Gleichungssystem $S = \{E_1 \doteq E_2, E_3 \doteq E_4, \ldots\}$, wobei E_i Terme sind. S ist gelöst, falls

1. jede Gleichung die Form $v \doteq E$ hat, wobei v: Variable und E: Term
2. jedes solche v max. 1 mal auf einer linken Seite steht (nochmal in rechter Seite ist okay)

<u>S lösen bzw. Unifizierbarkeit prüfen:</u>

(delete):
$S \cup \{x \doteq x\} \quad \Rightarrow \quad S$

(decomp):
$S \cup \{ f(E_1, \ldots, E_n) \doteq f(D_1, \ldots, D_n) \} \quad \Rightarrow \quad S \cup \{ E_1 \doteq D_1, \ldots, E_n \doteq D_n \}$

(conflict):
$S \cup \{ f(E_1, \ldots, E_n) \doteq g(D_1, \ldots, D_k) \} \quad \Rightarrow \quad \bot \text{ (wenn } f \neq g)$

(orient):
$S \cup \{E \doteq x\} \quad \Rightarrow \quad S \cup \{x \doteq E\}$ (E *keine* Variable)

(occurs) / (elim):

$$S \cup \{x \doteq E\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bot & (x \in FV(E),\ x \neq E) \\ S[E/x] \cup \{x \quad E\} & (x \notin FV(E),\ x \in FV(S)) \end{cases}$$

Falls $\bot$ erreicht wird → “nicht unifizierbar“
Falls gelöste Form erreicht wird → mgu=$[E_1/x_1, E_2/x_2, \ldots]$ (aus $x_i \doteq E_i$ ablesen)

Resolution in FOL

1. NNF (Negations-Normalform)
2. PNF (Pränexe Normalform)
3. Skolemform
4. CNF (Konjunktive Normalform)
5. Unifikation

Fitch / natürliche Deduktion

A, B: Terme
ϕ, ψ: Formeln
c: ein konkretes Subjekt

Not

$$\dfrac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}\ (\neg\ \mathrm{I})$$

$$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ (\neg\ \mathrm{E})$$

Bottom

$$\dfrac{A \quad \neg A}{\bot}\ (\bot\ \mathrm{I})$$

$$\dfrac{\bot}{\text{beliebig}}\ (\bot\ \mathrm{E})$$

Oder

$$\dfrac{A}{A \vee B}\ (\vee\ \mathrm{I}_1)$$

$$\dfrac{B}{A \vee B}\ (\vee\ \mathrm{I}_2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{|l} B \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \quad A \vee B}{C}\ (\vee\ \mathrm{E})$$

Und

$$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge\ \mathrm{I})$$

$$\dfrac{A \wedge B}{A}\ (\wedge\ \mathrm{E}_1)$$

$$\dfrac{A \wedge B}{B}\ (\wedge\ \mathrm{E}_2)$$

Implikation

$$\dfrac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow \mathrm{I})$$

$$\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ (\rightarrow \mathrm{E})$$

Existenz

$$\dfrac{\phi[c/x]}{\exists x(\phi)}\ (\exists\ \mathrm{I})$$

$$\dfrac{\exists x(\phi) \quad \begin{array}{|l} \boxed{c}\ \phi[c/x] \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists\ \mathrm{E})$$

Für Alle

$$\dfrac{\begin{array}{|l} \boxed{c} \\ \hline \vdots \\ \phi[c/x] \end{array}}{\forall x(\phi)}\ (\forall\ \mathrm{I})$$

$$\dfrac{\forall x(\phi)}{\phi[c/x]}\ (\forall\ \mathrm{E})$$

Gleich

$$\dfrac{}{A = A}\ (=\ \mathrm{I})$$

$$\dfrac{\phi[A/x] \quad A = B}{\phi[B/x]}\ (=\ \mathrm{E})$$

Die ($\exists$ I) kann man eigentlich nur in Kombination mit der ($\exists$ E) verwenden

Modelle / Semantik

Ein **Σ-Modell $\mathfrak{M}$** besteht aus:

- einer nichtleeren **Trägermenge M**.
- Einer **Interpretation** für jedes n-stellige Funktionssymbol $f/n \in \Sigma$, durch eine Funktion $\mathfrak{M}[\![f]\!]: M^n \mapsto M$
- Einer **Interpretation** für jedes n-stellige Prädikatsymbol $P/n \in \Sigma$, durch eine Teilmenge $\mathfrak{M}[\![P]\!] \subseteq M^n$

Eine **Umgebung η** ist eine Abbildung $\eta: V \mapsto M$,
ordnet jeder Variablen $v \in V$ einen Wert $m \in M$ der Trägermenge zu.

Ein spezielles Σ-Modell ist das **Herbrand-Modell**, in diesem gibt es keine Variablen in den Termen. Deshalb ist η dann leer und kann weggelassen werden.

<u>Interpretation eines Terms E berechnen</u>:

$$\mathfrak{M}[\![x]\!]\eta = \eta(x)$$

$$\mathfrak{M}[\![f(E_1, \ldots, E_n)]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![f]\!]\eta\,(\mathfrak{M}[\![E_1]\!]\eta, \ldots, \mathfrak{M}[\![E_n]\!]\eta)$$

<u>Erfülltheit einer Formel prüfen:</u> Erfülltheit von ϕ durch $\mathfrak{M}$ und η (kurz $\mathfrak{M}, \eta \vDash \phi$):

$\mathfrak{M}, \eta \vDash (E = D) \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{M}[\![E_n]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![D_n]\!]\eta$

$\mathfrak{M}, \eta \vDash P(E_1, \ldots, E_n) \quad \leftrightarrow \quad (\mathfrak{M}[\![E_1]\!]\eta, \ldots, \mathfrak{M}[\![E_n]\!]\eta) \in \mathfrak{M}[\![P]\!]$

$\mathfrak{M}, \eta \vDash \forall x(\phi) \quad \leftrightarrow \quad$ für alle $m \in M$ gilt: $\mathfrak{M}, \eta[x \mapsto m] \vDash \phi$

wobei $\eta[x \mapsto m](y) = \begin{cases} m & \text{für } y = x \\ \eta(y) & \text{sonst} \end{cases}$

Induktion

Wenn von einer „wenn dann“ Beziehung die Rede ist, ist eine Implikation zu beweisen. Bei einer „genau dann wenn“ Beziehung hingegen eine Äquivalenz.

<u>**Implikation:**</u> „Wenn ein Term E Eigenschaft x erfüllt, dann erfüllt er auch Eigenschaft y“

I. A. : Prüfe ob E die Eigenschaft x erfüllt

Falls ja: Zeige, dass E die Eigenschaft y erfüllt

Falls nein: Fertig (da Implikation trivial erfüllt)

I. V. : E_1, E_2 seien Terme für die gelte: Wenn sie Eig. x erfüllen, dann erfüllen sie auch Eig. y

I. S. : $E = f(E_1, E_2)$

Angenommen $f(E_1, E_2)$ habe die Eigenschaft x: Zeige, dass $f(E_1, E_2)$ auch Eigenschaft y hat

<u>**Äquivalenz:**</u> „Genau dann wenn ein Term E Eig. x erfüllt, dann erfüllt er auch Eig. y“

I. A. : (Beide Fälle müssen gezeigt werden (Term E muss entsprechend gewählt werden))

1. E hat Eigenschaft x: Zeige, dass E Eigenschaft y hat
2. E hat Eigenschaft x nicht: Zeige, dass E Eigenschaft y nicht hat

I. V. : E_1, E_2 seien Terme für die gelte: Genau dann wenn sie Eig. x erfüllen, erfüllen sie auch Eig. y

I. S. : $E = f(E_1, E_2)$ (Es muss nur entweder a) oder b) gezeigt werden)

Angenommen $f(E_1, E_2)$ hat Eig. x: Zeige, dass $f(E_1, E_2)$ auch Eig. y hat

a. Angenommen $f(E_1, E_2)$ hat Eig. y: Zeige, dass $f(E_1, E_2)$ auch Eig. x hat
b. Angenommen $f(E_1, E_2)$ hat Eig. x nicht: Zeige, dass $f(E_1, E_2)$ auch Eig. y nicht hat