Resolution über FOL

Beweisen sie folgende Formel mittels Resolution:

$$\exists x.(P(x) \rightarrow \forall y.P(y))$$

1 Negieren der Formel

Setze einfach $\neg$ vor die Formel.

$$\neg(\exists x.(P(x) \rightarrow \forall y.P(y)))$$

2 Bringe Formel in pränexe Normalform

Pränexe Normalform: Keine '$\rightarrow$', Quantoren '$\forall$', '$\exists$' nur zu Beginn der Formel

Eliminiere '$\rightarrow$' mittels $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$

$$\equiv \neg(\exists x.(\neg P(x) \vee \forall y.P(y)))$$

Ziehe Quantoren nach vorne, benenne falls nötig um

$$\equiv \neg(\exists x.(\forall y.(\neg P(x) \vee P(y))))$$

Ziehe '$\neg$' nach innen, damit die Quantoren ganz außen stehen
Benutze hierzu $\neg(\forall x.P(x)) \equiv \exists x.(\neg P(x))$ und $\neg(\exists x.P(x)) \equiv \forall x.(\neg P(x))$

$$\equiv \forall x.\neg(\forall y.(\neg P(x) \vee P(y)))$$

$$\equiv \forall x.\exists y.\neg(\neg P(x) \vee P(y))$$

3 Bringe Formel in Skolemform

Skolemform: Keine $\exists$-Quantoren mehr

Eliminiere $\exists$-Quantoren (Berücksichtige hierzu alle $\forall$-quantifizierten Variablen links von der betrachteten)

$$\rightsquigarrow \forall x.\neg(\neg P(x) \vee P(y)) \quad [a(x)/y]$$

Führe Substitution durch

$$\equiv \forall x.\neg(\neg P(x) \vee P(a(x)))$$

4 Bringe Formel in CNF und bilde daraus Klauselmenge

Lasse $\forall$-Quantoren weg

$$\rightsquigarrow \neg(\neg P(x) \vee P(a(x)))$$

Forme mit dem bereits bekannten Vorgehen in CNF um

$$\equiv \neg\neg P(x) \vee \neg P(a(x))$$

$$\equiv P(x) \vee \neg P(a(x))$$

Forme in Klauselmenge um (benenne dazu Variablen in jede Klausel neu)

$$\rightsquigarrow \quad \{P(x)\}, \quad \{\neg P(a(z))\}$$

5 Führe Resolution (mittels Variablensubstitution) durch

$$\{P(x)\}, \quad \{\neg P(a(z))\}$$

$$\downarrow \sigma$$

$$\square$$

Beweise noch mittels Unifikationsalgorithmus:

$$\{P(x) \ \doteq \ P(a(z))\}$$

$$(decomp) \rightarrow \{x \ \doteq \ a(z)\}$$

$$\Rightarrow \sigma = [a(z)/x]$$