1 Komplexe Zahlen

i ist die imaginäre Einheit mit der Eigenschaft $i^2 = -1$.

Darstellung komplexer Zahlen:

Kartesische Darstellung: $z = a + bi$, wobei $a =$ **Realteil(z)** und $b =$ **Imaginärteil(z)**.
Polardarstellung: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wobei $\varphi =$**Argument(z)** und $r =$ **Betrag(z)**.
konjugiert-komplexe:

$$z = (a + bi) \Leftrightarrow \bar{z} = (a - bi)$$

$\Rightarrow$ $\bar{z}$ geht aus z durch Spiegelung an der x-Achse hervor.

Rechnen in $\mathbb{C}$:

- **Multiplikation (kartesisch):**

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

- **Division (kartesisch):**

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$$

  $\Rightarrow$ mit Konjugierten des Nenners erweitern

- **Multiplikation (polar):**

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

  $\Rightarrow$ Beträge multiplizieren, Winkel addieren (für **Division** entsprechend Beträge dividieren, Winkel subtrahieren)

- **Potenzieren (polar):**

$$z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

  $\Rightarrow$ Beträge mit n potenzieren, Winkel mit n multiplizieren

- **Wurzelziehen (polar):**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) \ (k = 0, 1, ..., n - 1)$$

  $\Rightarrow$ Man erhält n Lösungen mit dem selben Betrag, die auf einem Kreis um den Ursprung **symmetrisch verteilt** sind.

Rechenregeln:

- $|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\ Re(z)$
- $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2\ i\ Im(z)$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

2 Unterräume

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \in V$ eine nichtleere Teilmenge. U heißt **Unterraum** von V , falls für alle $\vec{x}, \vec{y} \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $\vec{x} + \vec{y} \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. der Vektoraddition)
2. $\alpha\vec{x} \in U$. (Abgeschlossenheit bzgl. der Skalarmultiplikation)

Alternative Charakterisierung von Unterräumen: Eine Menge $U \in V$ ist genau dann Unterraum des Vektorraums V , wenn

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha x + \beta\vec{y} \in U.$$

Unterräume enthalten immer den Nullvektor!

Spann:

Die Menge aller Linearkombinationen eines Systems von Vektoren $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ eines $\mathbb{K}$-VR V heißt **Spann** oder **lineare Hülle** der Vektoren:

$$span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\} := \{\alpha_1\vec{v_1} + ... + \alpha\vec{v_n} | \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

Unterräume werden oft in der Form $U := span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ angegeben.

Homogene LGS:

Ein LGS heißt **homogen**, wenn die rechten Seiten alle gleich null sind. Die Lösungsmenge L_{hom} eines homogenen LGS $(A|0)$, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$,

- ist immer ein Unterraum des $\mathbb{K}^n$,
- ist niemals leer, denn $0 \in L_{hom}$.

Die Lösungsmenge L eines inhomogenen LGS ist kein Unterraum.

Lösungsmenge eines LGS und des zugeh. homogenen LGS:

Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ die nichtleere Lösungsmenge eines LGS $(A|b)$, und sei $L_{hom} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS $(A|0)$. Dann gilt

$$L = \vec{x}_0 + L_{hom},$$

wobei $\vec{x}_0$ ein beliebiges Element aus L ist.
$\Rightarrow$ **Um L zu kennen, reicht es, L_{hom} sowie ein einziges Element $\vec{x}_0 \in L$ zu kennen.**

Berechnung von $\mathbf{U_1 + U_2}$ und $\mathbf{U_1 \cap U_2}$:

Seien $U_1 = span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ und $U_2 = span\{\vec{w_1}, ..., \vec{w_n}\}$ durch Angabe ihrer Basen gegeben

1. Bringe Matrix $[\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}, -\vec{w_1}, ..., -\vec{w_n}]$ auf Stufenform
2. #Stufenspalten = **Dimension von $\mathbf{U_1 + U_2}$**,
   #NichtStufenspalten = **Dimension von $\mathbf{U_1 \cap U_2}$**
3. Die Stufenspalten kennzeichnen die Vektoren, die eine Basis von $U1 + U2$ bilden
4. Lösung des homogenen LGS = Basis des Raumes $U1 \cap U2$

Dimensionsformel für Unterräume: Sind U_1, U_2 Unterräume des $\mathbb{K}^n$, so gilt

$$dim(U_1) + dim(U_2) = dim(U_1 + U_2) + dim(U_1 \cap U_2)$$

3 Basis und Dimension

Lineare Unabhängigkeit: $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n} \in \mathbb{K}^m$ sind l.u. $\Leftrightarrow$ der Nullvektor lässt sich nur trivial als LK der n Vektoren darstellen $\Leftrightarrow$ Stufenform der Matrix hat Typ I.
Erzeugendensystem: $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ bilden ein EZS eines Vektorraums V, wenn sich jeder Vektor $\vec{x} \in V$ als Linearkombination der $\vec{v_i}$ darstellen lässt.
Ein EZS des $\mathbb{K}^m$ muss mindestens m Vektoren umfassen.

Basis:

Ein System von (endlich) vielen Vektoren, das

- linear unabhängig ist und
- ein EZS bildet,

heißt **Basis** (des Vektorraums). Die Anzahl der Elemente einer Basis heißt **Länge der Basis** oder **Dimension** von V.
In einem Vektorraum haben alle Basen die gleiche Länge.
Basisergänzungssatz: Jedes l.u.-System eines endlichdimensionalen Vektorraums V lässt sich durch Hinzunahme von Vektoren zu einer Basis von V ergänzen.

Bestimmung der Basis/Dimension eines Raumes $\boldsymbol{U = span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}}$:

1. Bringe Matrix $[\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}]$ auf Stufenform
2. Die Spalten, in denen sich Stufen bilden, kennzeichnen, welche der $\vec{v_i}$ l.u. sind
3. Die Vektoren $\vec{v_i}$, in deren zugehörigen Spalten sich Stufen bilden, bilden eine Basis von U
4. $dim(U) =$ Anzahl der Stufen

4 Lineare Abbildungen

Seien U und V $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt **linear**, wenn

1. $\forall x, y \in U : f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in U, \alpha \in \mathbb{K} : f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Alternative Charakterisierung von Lin. Abbildungen:

$$\forall x, y \in U \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Für jede lineare Abbildung gilt: $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$
Prinzip der linearen Fortsetzung: Kennt man die Wirkung einer linearen Abbildung auf eine Basis, so kennt man die gesamte lineare Abbildung.

Kern und Bild linearer Abbildungen:

Sei $f : U \to V$ linear. Dann ist

$$Kern(f) := \{x \in U | f(x) = \vec{0}\} \subseteq U$$

der **Kern von f** und

$$Bild(f) := \{f(x) | x \in U\} = f(U) \subseteq V$$

das **Bild von f**.

Berechnung von Bild und Kern einer linearen Abbildung (gegeben durch Angabe von $f(\vec{e_1}), ..., f(\vec{e_n})$)

1. Bringe das homogene LGS mit Systemmatrix $[f(\vec{e_1}), ..., f(\vec{e_n})]$ auf Stufenform
2. #Stufenspalten = **Dimension des Bildes**, #NichtStufenspalten = **Dimension des Kerns**
3. Die f ($\vec{b_i}$), für die die i-te Spalte der Stufenform eine Stufe enthält, bilden eine **Basis des Bildes**.
4. Die Lösung des LGS bildet den **Kern von f**.

Dimensionsformel für Bild und Kern: Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear. Dann ist

$$dim(Kern(f)) + dim(Bild(f)) = n.$$

Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung: Angabe einer lin. Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch Angabe der Bilder der Standardbasisvektoren in Form einer $m \times n$-Matrix.
Anwendung einer Matrix auf einen Vektor: Multipliziert man die zu einer lin. Abbildung f gehörende Darstellungsmatrix A mit einem Vektor $\vec{x}$, ist das Produkt $\vec{x}$ gerade $\vec{y} = f(\vec{x})$:

$$A\vec{x} = f(\vec{x}).$$

Addition lin. Abbildungen: Addition lin. Abbildungen ⇔ Addition ihrer Darstellungsmatrizen
Verkettung lin. Abbildungen: Verkettung lin. Abbildungen ⇔ Multiplikation ihrer Darstellungsmatrizen

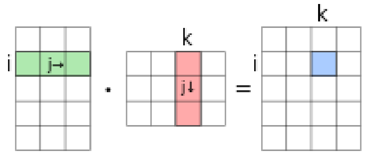
$$C = M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = AB$$

5 Matrizen

Addition und Skalarmultiplikation: komponentenweise definiert (wie bei Vektoren)

Matrizenmultiplikation:

Der Eintrag in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von $C = A \cdot B$ berechnet sich unter Verwendung der **i-ten Zeile von A** und der **k-ten Spalte von B**.



Achtung: Die Spaltenzahl des ersten Faktors muss gleich der Zeilenzahl des zweiten Faktors sein, kurz $\mathbb{K}^{r \times n} \times \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}^{r \times m}$.
Matrix-Vektor-Multiplikation: Spezialfall der Matrix-Matrix-Multiplikation, bei dem die rechte Matrix nur aus einer Spalte besteht.

Inverse von Matrizen:

$n \times n$-Matrizen, die ein inverses Element haben, nennt man **invertierbar** oder **regulär**.
Achtung: Nur quadratische Matrizen sind invertierbar!
Prüfung einer Matrix A auf Invertierbarkeit: Bringe A auf Stufenform → Ist **Stufenform von Typ I** ist A invertierbar

Berechnung der Inversen einer $n \times n$-Matrix:

1. Bilde Matrix $(A|E)$ mit der $n \times n$-Einheitsmatrix E als rechter Seite
2. Forme das Schema mittels elementarer Umformungen solange um bis links die Einheitsmatrix steht
3. Rechts steht nun A^{-1}

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Formel im Spezialfall n = 2:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

transponierte Matrix:

Die **transponierte Matrix** einer Matrix $A = (a_{ij})$ ist die Matrix $A^T := (a_{ji})$ ⇒ Man transponiert eine Matrix, indem man **Zeilen mit Spalten vertauscht**.

Rechenregeln für Matrizen:

$$A + B = B + A$$
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(AB)C = A(BC),$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$
$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Rang einer Matrix:

Die Dimension des Bildes der zu einer Matrix A gehörenden linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, bezeichnet man als **Rang von A**.

$$rang(A) := dim(Bild(A)) = dim(Bild(f))$$

Sind alle Spalten linear unabhängig, also $rang(A) = n$, hat A **vollen Spaltenrang**.
Berechnung des Ranges: Die **Anzahl der Stufen** der zu A gehörenden Stufenform ist der Rang der Matrix.
Es gilt:

$$rang(A) = rang(A^T)$$

6 Determinanten

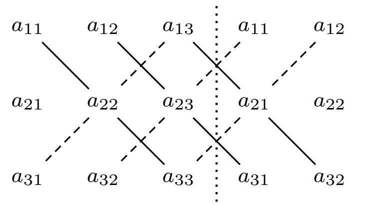
Formel für 2 × 2-Matrizen:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Formel für 3 × 3-Matrizen (Regel von Sarrus):

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



⇒ Dreierprodukte entlang der **durchgezogenen Linien addieren**, Dreierprodukte entlang der **gestrichelten Linien subtrahieren**.

Entwicklungssatz von Laplace:

Zurückführung der Berechnung einer $n \times n$-Determinante auf die Berechnung von n $(n-1) \times (n-1)$-Determinanten

Entwicklung nach j-ten Spalte: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j})$

Entwicklung nach i-ten Zeile: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j})$

Dabei ist $A_{i,j}$ die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Die Koeffizienten $(-1)^{i+j}$ ergeben ein **Schachbrettmuster**:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & ... \\ - & + & - & + & ... \\ + & - & + & - & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Determinante für Dreiecksmatrizen:

Die Determinante einer (rechten/oberen oder auch einer linken/unteren) Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonaleinträge:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Rechenregeln:

- **Vielfaches einer Zeile** zu einer anderen Zeile sowie **Vielfaches einer Spalte** zu einer anderen Spalte addieren ändert den Wert der Determinante nicht
- **Vertauschen zweier Zeilen oder zweier Spalten** ändert das Vorzeichen der Determinante
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ Spalten l.a. $\Leftrightarrow$ Zeilen l.a. $\Leftrightarrow$ A nicht invertierbar

$$\det(A) = \det(A^T)$$
$$det(\alpha A) = \alpha^n det(A) \ (\forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$
$$\det(A^k) = \det(A)^k$$
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Haufenweise Äquivalenzen:

Für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und die zugehörige Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ gilt die Äquivalenz:

f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv
$\Leftrightarrow$ $\text{Kern}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ A^{-1} existiert $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(A) = n$
$\Leftrightarrow$ das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ (genau) eine Lösung
$\Leftrightarrow$ die Spalten von A sind l.u. $\Leftrightarrow$ die Zeilen von A sind l.u.
$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A^T) \neq 0$

7 Eigenwerte/Eigenräume

Definitionen:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert (EW)** von A, wenn es ein $\vec{x} \in \mathbb{C}\{\vec{0}\}$ gibt, so dass

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

gilt. Ein $\vec{x} \neq \vec{0}$, das diese Gleichung erfüllt, heißt **Eigenvektor (EV)** von A zum Eigenwert λ.
Der zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum gehörende Raum.

$$\begin{aligned} \text{Eig}(\lambda) &:= \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n | A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n | (A - \lambda E_n)\vec{x} = \vec{0}\} \\ &= \text{Kern}(A - \lambda E_n) \end{aligned}$$

heißt **Eigenraum von A** zum Eigenwert λ.
Die Summe der Diagonalelemente von A nennt man **Spur**.

Berechnung von Eigenwerten/Eigenräumen:

1. Berechne das **charakteristische Polynom** $p(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$ von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
2. Die **Nullstellen des Charakteristischen Polynoms** p sind die Eigenwerte von A. Es gibt mindestens einen und höchstens n viele.
3. Der **Kern** der Matrix $A - \lambda_i E_n$ bildet die Basis des Eigenraums (Berechnung mit Gauß).

‘

Beispiel für $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda E_n) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6 \end{aligned}$$

Ergebnis: $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -1$ sind die Eigenwerte von A.

Algebraische und geometrische Vielfachheit:

algebraische Vielfachheit: Vielfachheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms
geometrische Vielfachheit: Dimension des Eigenraumes $\text{Eig}(\lambda_i)$
Es gilt: $\text{geomVfht}(\lambda_i) \leq \text{algVfht}(\lambda_i)$

Ähnlichkeit:

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, so dass

$$B = XAX^{-1}$$

Eine Matrix B, die ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, heißt **diagonalisierbar**.
Sind zwei Matrizen ähnlich, so haben sie das gleiche charakteristische Polynom, die gleiche Determinante, die gleiche Spur und die gleichen Eigenwerte.

Diagonalisierbarkeit:

Prüfung auf Diagonalisierbarkeit: Es gilt: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Für alle EW $\in \mathbb{C}$ von A ist **geometrische = algebraische Vfht**.
Bildung der Diagonalmatrix L: Jeder Diagonaleneintrag entspricht einem EW:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bildung von X: die i-te Spalte von X ist jeweils der Eigenvektor zum i-ten Diagonaleneintrag von L