Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Prof. Dr. W. Borchers
Dr. Estelle Marchand

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Mathematik für Ingenieure III C (Inf)
Nachklausur

Dauer: 90 min

Aufgabe 1) Bestimmen Sie mittels Separation die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $y' = \exp\left(\frac{1}{2}y + t + 1\right)$, $y(0) = -2$.

b) Auf welchem maximalen Intervall existiert die Lösung aus a) (und ist dort also stetig differenzierbar)?

c) $y' = (t-y)^2$, $y(1) = 1$.

(4+2+4 Punkte)

Aufgabe 2) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(t) = -9y(t) + \exp(3t).$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung.

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

d) Lösen Sie mit c) die zugehörige Anfangswertaufgabe $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(4×2 Punkte)

Aufgabe 3) Sei für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t \in [0, \infty)$,

$$f(x,t) = t \cdot \cos(x).$$

Wir wollen f minimieren und maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x,t) := \sin(x) - t = 0.$$

a) Warum existieren Extremalstellen von f auf

$$N_g(0) := \{(x,t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \infty) : g(x,t) = 0\}$$

überhaupt?

b) Berechnen Sie $f(0,t)$ für $(0,t) \in N_g(0)$, $f(\frac{\pi}{2}, t)$ für $(\frac{\pi}{2}, t) \in N_g(0)$ und $f(x,0)$ für $(x,0) \in N_g(0)$.

c) Begründen Sie, dass $f(x,t) \geq 0 \; \forall \, x \in N_g(0)$.

d) Geben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x,t,\lambda)$ an. Berechnen Sie die kritischen Stellen der Lagrangefunktion.

Hinweis: Betrachten Sie das Additionstheorem für cos.

e) Geben Sie die Minimal- und Maximalwerte von $f_{|N_g(0)}$ an.

(1 +1.5 + 0.5 + 5 + 2 Punkte)

Aufgabe 4)

a) Für welche $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ist $((\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \setminus [0]_k \,,\, \cdot)$ eine abelsche Gruppe?

b) Falls existent, bestimme man für $X = 5, 6, 7, 9, 15, 23$ (genauer: $X = [5]_{10} \ldots [23]_{10}$) das inverse Element $X^* \in \{0, 1, \ldots, 9\} \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

(i) bgl. der Addition "+"

(ii) bgl. der Multiplikation "·"

(3+3+3 Punkte)

WS 09-10
Keine elektronische Hilfsmittel!