UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG, DEPARTMENT MATHEMATIK

Mathematik für Ingenieure C 4, 25. Juli 2014, 8:00–9:30 Uhr
Dr. W. Rathmann
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.
Alle schriftlichen Hilfsmittel sind zugelassen.

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markow-Kette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & a & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Parameter a und b und zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

b) (1 Punkt) Ist der Graph irreduzibel?

c) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Von einem zweitstufigen gekoppelten Modell ist bekannt, dass für die erste Stufe $X_1 \sim R_{(0,2)}$ gilt. Die Übergangsdichte f_2^1 ist gegeben durch

$$f_2^1(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{2}{x_1^2} x_2, & \text{für } x_2 \in (0, x_1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Randdichten f^{X_1} und f^{X_2}.

b) (2 Punkte) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) (1 Punkte) Bestimmen Sie die bedingte Dichte $f^{(X_2|X_1)}$.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

a) (5 Punkte) Gegeben sei die Ordnungsstatistik einer Stichprobe

$$\mathbf{x}_{[]} = (-3, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3)$$

mit $\sum x_{[i]}^2 = 27$. Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$, den Median $\tilde{x}$, die Quantile $u_{25\%}$ und $u_{75\%}$ sowie die empirische Varianz $s_{\mathbf{x}}^2$. Skizzieren Sie den zugehörigen (einfachen) Boxplot.

b) (5 Punkte) Von einer Stichprobe $\mathbf{y}$ einer normalverteilten Grundgesamtheit Y sei der Umfang $n = 16$, $\bar{y} = 2$ und $s_{\mathbf{y}}^2 = 9$ bekannt.
Welche Schätzfunktion $\hat{\Theta}$ wählen Sie zum Schätzen des Erwartungswertes $E(Y)$?
Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert $\hat{\Theta} = \mu$ zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.05$
Quantile einiger Verteilungen: $z_{0,95} = 1,64$, $z_{0.975} = 1,96$, $t_{0,95;15} = 1,75$, $t_{0,975;15} = 2,13$, $t_{0,95;16} = 1,75$, $t_{0,975;16} = 2,12$.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Gegeben sei eine Zufallsvariable V mit Verteilung

$$P^V(V = i) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^i, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Weiterhin ist die Zufallsvariable $W : \mathbb{N} \to \Omega_W$ mit

$$W = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}V\right)\right)^2$$

in Abhängigkeit von V gegeben.

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass P^V die Eigenschaften einer Zähldichte erfüllt und geben Sie ein Wahrscheinlichkeitsmodell für V an.

b) (6 Punkte) Berechnen Sie P^W und geben Sie dabei die Urbildmengen $W^{-1}(k)$ aller möglichen Ausgänge $k \in \Omega_W$ der Abbildung W an.

c) (1 Punkt) Geben Sie ein Wahrscheinlichkeitsmodell für W an.