Mathematik für Ingenieure I C, Bachelor **Klausur (90 min)**

Prof. Dr. W. Borchers / PD Dr. S. Kräutle **WS 2008/09**

Mittwoch, 08.04.2009

A1) (Folgen)

a) Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte der Folge

$$a_n = (-1)^{n+1}\left[n + \frac{5}{n^2 \sin\frac{1}{n}}\right] + (-1)^n \left[n + 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right].$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{(n+2)^{\frac{3}{2}} - (n+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

c) Es sei die Folge (a_n) erklärt durch

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{3} - 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

(i) Zeigen Sie per Induktion, dass $a_n \geq -9$ und dass $a_{n+1} - a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Begründen Sie, dass die Folge einen Limes hat, und berechnen Sie diesen.

(3+3+4=10 Punkte)

A2) (Reihen)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $p(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$.

c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Stellen Sie die Partialsummen s_N als Teleskopsummen dar unter Beachtung von $\frac{1}{ab} = x(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$ für $a \neq b$ und geeignetes x.

(3+3+3=9 Punkte)

A3) (Komplexe Zahlen)

a) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil sowie die Polardarstellung der komplexen Zahlen z_j, $(j=1,2,3,4)$:

$$z_1 = \frac{-8+4\,i}{9+18\,i}, \quad z_{2,3} = \sqrt{-9\,i}\,, \quad z_4 = (1+i\,)^{4\cdot 10^5}$$

b) Skizzieren Sie die Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{C}$, definiert durch

$$M_1 = \{z\in\mathbb{C} \mid |1-z| \geq |1+z|\}$$
$$M_2 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-i| = |z+i|\}$$

(6+4=10 Punkte)

A4) (Lineare Gleichungssysteme)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3\lambda+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix},$$

dessen Lösungsmenge von den Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abhängt.

(i) Für welche Parameter λ, μ hat das LGS keine Lösung?

(ii) Für welche Parameter λ, μ hat das LGS unendlich viele Lösungen?
Wie lautet die Lösungsmenge in diesem Fall?

(iii) Berechnen Sie die Lösung des LGS im Fall $\lambda = \mu = -1$.

(10 Punkte)

(Summe: ? Punkte)