Mathematik für Ingenieure I C, Bachelor — **WS 2008/09**

Prof. Dr. W. Borchers / PD Dr. S. Kräutle — **Nachklausur**

Montag, 12.10.2009 — **Dauer: 90 min**

A1) (Komplexe Zahlen)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{1-i}{4-3\,i}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}-1}, \quad z_3 = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^8}.$$

b) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}((2-i)\,z) = 0\}$$
$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |1-z|^2 = (1-|z|)^2\}$$

(6+5=11 Punkte)

A2) (Folgen)

a) Die Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2\,a_n - \frac{1}{2}\,a_n^2.$$

(i) Zeigen Sie mittels Vollständiger Induktion, dass $0 \le a_n \le 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie (mit oder ohne Vollständige Induktion), dass (a_n) monoton wachsend ist.

(iii) Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+2n+1}{3n^3+2n^2+n+3}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1+\sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

(6+5=11 Punkte)

A3) (Reihen)

a) Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^2}{2^n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergieren.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^2}{2^n}\, x^n \qquad \text{und} \qquad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n$$

(6+2=8 Punkte)

A4) (Lineare Gleichungssysteme)

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & + & z & = & 5\,\alpha \\ 2\,x & + & 20\,y & + & 6\,z & = & 10\,\alpha + 4 \\ -x & + & 6\,y & + & z & = & \alpha + 1 \end{array}$$

lösbar? Bestimmen Sie im Falle der Lösbarkeit jeweils die Lösungsmenge.

b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

einen trichttrivialen Nullraum (Kern) hat. Bestimmen Sie diese Nullräume dann.

(4+6=10 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)

Viel Erfolg!