Mathematik für Ingenieure II C (Inf) II B (WIng), Bachelor — SS 2009

Prof. Dr. W. Borchers / PD Dr. S. Kräutle — Klausur

Mittwoch, 07.10.2009 — Dauer: 90 min

A1) (Grenzwerte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x+3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{e^{\cos x}-e}$

(4+4=8 Punkte)

A2) (Taylor-Entwicklung)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \cos x \int_{\pi}^{x} t\cos t\,dt.$$

a) Berechnen Sie für f die Taylor-Polynome erster und zweiter Ordnung, T_1, T_2, für den Entwicklungspunkt $x_0=\pi$.

b) Stellen Sie für T_1 das Restglied R_1 auf, und finden Sie unter der Annahme $x\in[0,\pi]$ eine Schranke für das Restglied in der Form

$$|R_1(x)| \le c\,|x-\pi|^2.$$

(7+4=11 Punkte)

A3) (Integration)

Für welche $\alpha\geq 0$ existieren folgende uneigentliche Integrale

$$\text{a)}\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{x\,(\ln\frac{1}{x})^{\alpha}}, \qquad \text{b)}\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^{\alpha}}$$

Im Falle der Existenz berechne man diese in Abhängigkeit von α.

Hinweis: z.B. Substitution $u=\ln x$

(5+5=10 Punkte)

A4) (Extremwertprobleme)

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definiert durch

(i) $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$

(ii) $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz$

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0,0)^T$ eine lokale Extremstelle für g ist. Handelt es sich um ein Minimum oder Maximum?
Hinweis: Eine mögliche Vorgehensweise: Schätzen Sie $g(x,y,z)$ in einer Umgebung von $(0,0,0)^T$ ab; verwenden Sie $|x_i|\le\|(x_1,x_2,x_3)^T\|$.

(8+3=11 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)

Viel Erfolg!