Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Prof. Dr. W. Borchers
Dr. Estelle Marchand

Mathematik für Ingenieure III C (Inf)
Lösung für Klausur — Dauer: 90 min

Aufgabe 1) Bestimmen Sie mittels Separation die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $y'(t) = -\exp(t + y(t))$, $y(0) = -\ln 2$.

Lösung:

$$y' \exp(-y) = -\exp(t) \quad (2\ Pkte)$$

$$-\exp(-y(t)) + \exp(\ln 2) = -\exp(t) + 1 \quad (2\ Pkte)$$

$$\exp(-y(t)) = \exp(t) + 2 - 1$$

$$y(t) = -\ln(\exp(t) + 1) \quad (1\ Pkt).$$

b) $ty'(t) - y(t) = t \ln t$, $y(1) = 1$. $(t > 0.)$

Hinweis: Benützen Sie für b) die Substitution $u(t) = \frac{y(t)}{t}$.

Lösung:

$$u(1) = \frac{y(1)}{1} = 1 \quad (1\ Pkt)$$

$$u'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{ty'(t) - y(t)}{t^2} = \frac{\ln t}{t} \quad (2\ Pkte)$$

$$\begin{aligned} u(t) - u(1) &= \frac{\ln^2(t)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} \\ u(t) &= 1 + \frac{\ln^2(t)}{2} \\ y(t) &= t + \frac{t}{2} \ln^2(t) \quad (2\ Pkte) \end{aligned}$$

Nachprüfen;

$$y(1) = 1$$

$$y'(t) = 1 + \frac{1}{2} \ln^2(t) + \frac{t}{2} \frac{2 \ln t}{t} = \frac{y(t)}{t} + \ln t.$$

(5+5 Punkte)

Aufgabe 2) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(t) = -y'(t) + 2y(t) - \exp(-2t).$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung.

Lösung:
Zugehörige homogene Gleichung: $P(D)y_h = 0$ mit $P(D) = D^2 + D - 2 = (D + 2)(D - 1)$
Fundamentalsystem: $\exp(t)$, $\exp(-2t)$.

b) Bestimmen Sie α und die Ordnung des Polynoms p für den Ansatz einer partikulären Lösung der Form $y_p(t) = p(t) \exp(\alpha t)$.

Lösung: $\alpha = -2$, Polynom Ordnung 0+1 = 1.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

Lösung:
$y_p(t) = Ct \exp(-2t)$
$(D - 1)(D + 2)y_p \overbrace{=}^{!} - \exp(-2t)$
$(D + 2)y_p = C \exp(-2t)$
$(D - 1)(D + 2)y_p = (-2C - C) \exp(-2t) = -3C \exp(-2t)$
$y_P(t) = \frac{t}{3} \exp(-2t)$

d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung:

$$y(t) = \frac{t}{3} \exp(-2t) + C_1 \exp(t) + C_2 \exp(-2t)$$

e) Lösen Sie mit d) die zugehörige Anfangswertaufgabe $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Lösung:

$y(0) = C_1 + C_2 \overbrace{=}^{!} 0$
$y'(t) = \frac{1}{3}\exp(-2t) - \frac{2}{3}t\exp(-2t) + C_1\exp(t) - 2C_2\exp(-2t)$
$y'(0) = \frac{1}{3} + C_1 - 2C_2$
$C_1 = -\frac{1}{9}$, $C_2 = \frac{1}{9}$
$y(t) = \frac{t}{3}\exp(-2t) - \frac{1}{9}\exp(t) + \frac{1}{9}\exp(-2t)$

(2+2+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3) Sei

$$f(x,y,z) = x^2 + y \cdot z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen f minimieren und maximieren auf der Einheitskugel K_1, d.h. unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

a) Warum existieren Extremalstellen von f auf K_1 überhaupt?

Lösung: $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$
g stetig $\Rightarrow$ ker g geschlossen
ker g geschlossen und begrentzt $\Rightarrow$ ker g Kompakt
f stetig und ker g kompakt $\Rightarrow$ Im$_f$(ker g) kompakt

b) Geben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)$ an.

Lösung:

$$\mathcal{L}(x,y,z) = x^2 + y.z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

c) Berechnen Sie die kritischen Stellen der Lagrangefunktion und geben Sie die Minimal- und Maximalwerte von $f_{|K_1}$ an.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $x = 0$ und $x \neq 0$.

(1. Fall 2,5 Punkte, 2. Fall 2,5 Punkte, Min 0,5 Punkte, Max 0,5 Punkte)

Lösung:

$$\partial_x = 2x + 2\lambda x \quad (1)$$
$$\partial_y = z + 2\lambda y \quad (2)$$
$$\partial_z = y + 2\lambda z \quad (3)$$
$$\partial_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad (4)$$

• Fall $x = 0$:
(4) $\rightarrow y^2 + z^2 = 1$
(2)$\times z$ - (3) $\times y \rightarrow z^2 - y^2 = 0 \rightarrow y^2 = z^2 = \frac{1}{2}$
$f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$
$f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$ (MIN)
• Fall $x \neq 0$:
(1) $\rightarrow \lambda = 0$
In (2) $\rightarrow z = 0$
In (3) $\rightarrow y = 0$
In (4) $\rightarrow x = \pm 1$
$f(1,0,0) = f(-1,0,0) = 1$ (MAX)

(2+2+6 Punkte)

Aufgabe 4)

a) Beantworten Sie jeweils für $k = 5$ und für $k = 9$ folgende Fragen:

(i) Existiert zu $X = 3$ in $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ das inverse Element $X^* \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ bzgl. der Addition "+" und bzgl. der Multiplikation in $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$?

(ii) Wie lautet jeweils X^* im Falle der Existenz?

Lösung:
Für $k = 5$: k ist eine Primzahl also $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* = \{1, \ldots, k-1\}$ und 3 ist invertierbar für ".".
• $k = 5$
$-3 \equiv_5 2$, Inverse von 3 für + ist 2
$3.2 = 6 \equiv_5 1$, Inverse von 3 für . ist 2
• $k = 9$
$-3 \equiv_9 6$, Inverse für + ist 6.
$g.g.T(3,9) = 3 \neq 1$, Inverse für . existiert nicht
($3 \notin (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^* = \{[1],[2],[4],[5],[7],[8]\}$.)
((i) 3 Punkte, (ii) 3 Punkte)

b) In der Prüfziffer

4 3 8 9 1 4 8 4 X_9

ist die letzte Ziffer X_9 unlesbar. Rekonstruieren Sie diese aus der Prüfgleichung

$$X_9 = -\sum_{j=1}^{8}(2+(-1)^j)X_j \mod 10.$$

Lösung: d.h. $g_1 = 1$, $g_2 = 3$, $g_3 = 1$, $g_4 = 3$, $\ldots$

$$\begin{aligned} X_9 &= -[4+3.3+8+3.9+1+3.4+8+3.4] \mod 10 \\ &= -[4-1+8+7+1+2] \mod 10 \\ &= -11 \mod 10 \\ &= -1 \mod 10 \\ &= 9 \mod 10. \end{aligned}$$

(6+4 Punkte)