Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Prof. Dr. W. Borchers
Dr. Estelle Marchand

Mathematik für Ingenieure III C (Inf)
Lösung für Probeklausur — Dauer: 90 min

Aufgabe 1) Bestimmen Sie mittels Separation die Lösung der folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $y' = \frac{t+y}{t+y+1}$, $y(0) = 1$.

Hinweis: Berechnen Sie die Lösung in der Form $h(t, y(t)) = 0$.

Lösung:
Siehe Aufgabe A27:
$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$
$y' = 1 - \frac{1}{t+y+1}$
$u := t + y + 1$
$u' = 1 + y' = 2 - \frac{1}{u} = \frac{2u-1}{u}$, $u(0) = 2$ $(= 0 + y(0) + 1)$.
$2 - \frac{1}{u(0)} \neq 0 \to$ Lösung mittels Separation:

$$\begin{aligned}
\frac{u}{2u-1}u' &= 1 \\
\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2u-1)}\right)u' &= 1 \\
\int_{u(0)}^{u(t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\tilde{u} - \frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}\tilde{u} &= \int_0^t \mathrm{d}\tilde{t} \\
\frac{u(t) - 2}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{|u(t) - \frac{1}{2}|}{|2 - \frac{1}{2}|} &= t \\
\frac{y(t) + t - 1}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{2y(t) + 2t + 1}{3} &= t \\
\text{d.h.} \quad h(t, y(t)) = 0 \quad \text{wobei}
\end{aligned}$$

$$h(t, y) = y - t + \frac{1}{2} \ln (2y + 2t + 1) - 1 - \frac{\ln 3}{2}.$$

(Randwerte nachprüfen: $h(0, 1) = 0$.)

((((((**Bemerkung:**
Kritische Lösung: $2u - 1 \equiv 0$, $u \equiv \frac{1}{2}$, $y(t) = u(t) - t - 1 = -\frac{1}{2} - t$.
(Nachprüfen: $\frac{t+y}{t+y+1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 = y'$. Gilt z.B. für Anfangswert $y(0) = -\frac{1}{2}$.)
))))))

b) $y'' + y' = 1$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Lösung:
• Mittels Separation:
$z := y'$
$z' + z = 1$, $z(0) = 0$.
$z' = 1 - z$, $1 - z(0) \neq 0$
$\frac{z'}{1-z} = 1$
$-\ln \frac{|1-z(t)|}{|1|} = t$ und $z(0) = 0$
$|1 - z(t)| = \exp(-t)$ und $z(0) = 0$
$z(t) = 1 - \exp(-t)$
$y'(t) = 1 - \exp(-t)$, $y(0) = 0$
$y(t) = t + \exp(-t) - 1$.
• Mittels Ansatz im Forme der Rechte Seite:
Zugehörige homogene Gleichung: $P(D)y_h = 0$ wobei $P(D) = D^2 + D = D(D+1)$
Nullstellen von P: 0, -1
Fundamental System: 1, $\exp(-t)$
Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung:
$y_h(t) = C_1 + C_2 \exp(-t)$.
Rechte Seite löst die Homogene Gleichung.
$y_p(t) = p(t).\exp 0.t$, p Polynom, Grad(p) = grad von Polynom im Rechte Seite + grad von 0 als Nullstelle von Charakteristische Polynom $P = 1$.

$P(D)y_p = (D^2 + D)y_p = Dy_p \overset{!}{=} 1$
$\Rightarrow y_p(t) = t +$ Konstante
Allgemeine Lösung:
$y_h(t) + y_p(t) = C_1 + C_2 \exp(-t) + t$
Anfangswerte $\Rightarrow -C_2 + 1 = 0$, $C_1 + C_2 = 0$.
$y(t) = -1 + \exp(-t) + t$.

(4+4 Punkte)

Aufgabe 2) Wir betrachten die Differenzialgleichung

$$4y'' + 4y' + 2y = 0.$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem.

Lösung: Die Gleichung ist homogen. $P(D)y = 0$ wobei $P(D) = 4D^2 + 4D + 2 = 4(D - \frac{1+i}{2})(D - \frac{1-i}{2})$
reelles Fundamentalsystem: $\exp(-\frac{t}{2})\cos\frac{t}{2}$, $\exp(-\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}$.

b) Lösen Sie mit a) die zugehörige Randwertaufgabe $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Lösung: Allgemeine Lösung:

$$y(t) = \exp(-\frac{t}{2})\left(C_1 \cos\frac{t}{2} + C_2 \sin\frac{t}{2}\right)$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(1) = 1 \quad und C_1 = 0 \Rightarrow \exp(-\frac{1}{2}) C_2 \sin\frac{1}{2} = 1$$

$$y(t) = \exp(\frac{1-t}{2}) \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{1}{2}}.$$

(4+4 Punkte)

Aufgabe 3) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren den (minimalen) Abstand der Hyperbel

$$\mathcal{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 1\}$$

zur Geraden

$$\mathcal{G} := \{(T,S) \in \mathbb{R}^2 | S = 2T\}.$$

Hinweis: Das Abstandsquadrat zweier Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(T, 2T)$ auf $\mathcal{G}$ ist

$$f(x,y,T) = (x-T)^2 + (y-2T)^2.$$

Minimieren Sie f unter der Nebenbedingung $(x,y) \in \mathcal{H}$, d.h.

$$g(x,y,T) := x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Sie dürfen davon ausgehen, dass das globale Minimum existiert und eine kritische Stelle ist.
Zwischenschritte:
(a) Berechnen Sie zunächst die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x,y,T,\lambda)$.
(b) Zeigen Sie, dass Punkte mit $x = 0$ nie die Nebenbedingung erfüllen.
(c) Zeigen Sie, dass Punkte mit $x = T \neq 0$ keine kritische Stellen von $\mathcal{L}$ sein können, da dies wieder auf einen Widersprich zur Nebenbedingung führt.
(d) Bestimmen Sie aus $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ zunächst λ in Abhängigkeit von x, T.

Lösung:
(a)

$$\mathcal{L}(x,y,T,\lambda) := f + \lambda g = (x-T)^2 + (y-2T)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 1).$$

(b) $g(0,y,T) = -y^2 - 1 < 0$.
(c)

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} & = & 2(x-T) + 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \\
(2) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} & = & 2(y-2T) - 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \\
(3) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} & = & 2(T-x) + 4(2T-y) \overset{!}{=} 0 \\
(4) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} & = & x^2 - y^2 - 1 \overset{!}{=} 0
\end{array}$$

Für eine kritische Stelle so dass $x = T \neq 0$ dann $\lambda = 0$, $y = 2T = 2x$, $x^2 - y^2 = (1-2^2)x^2 < 0$, Widerspruch.
(d)
• Nach (1): $\lambda = \frac{T-x}{x}$.
In (2): $2(y-2T) = 2(T-x)\frac{y}{x}$.
$(2T - y) = -(T-x)\frac{y}{x}$.
In (3): $2(T-x) - 4(T-x)\frac{y}{x} = 0$
$2\frac{y}{x} = 1$
$y = \frac{x}{2}$
In (4): $x^2(1 - \frac{1}{2^2}) = 1$
$x^2 = \frac{4}{3}$
In (λ in (1)) = (λ in (2)):
$\frac{T}{x} - 1 = 1 - 2\frac{T}{y} = 1 - 4\frac{T}{x}$
$T\frac{5}{x} = 2$
$T = \frac{2x}{5}$
• Berechnen Quadrat des Abstand:

$$\begin{array}{rcccccc}
(T-x)^2 & = & x^2(\frac{2}{5} - 1)^2 & = & \frac{4}{3}(\frac{3}{5})^2 & = & \frac{12}{25} \\
(y-2T)^2 & = & x^2(\frac{1}{2} - \frac{4}{5})^2 & = & \frac{4}{3}(-\frac{3}{10})^2 & = & \frac{3}{25}
\end{array}$$

$$\text{Abstand} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

(12 Punkte)

Aufgabe 4) (Algebra)
Wie lang darf ein Wort $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ gebildet aus der Ziffernmenge {0,1,...,8} höchstens sein (d.h. wie groß darf n sein) damit eine Prüfgleichung der Form

$$\sum_{j=1}^{n+1} g_j x_j = c \bmod 9$$

alle Einzel- und Vertauschungsfehler erkennt, sofern sie nicht gleichzeitig vorliegen. Bestimmen Sie alle Mengen aus denen dann die Gewichte gewählt werden dürfen.

Lösung:

- Einzelfehler: $ggT(g_j, 9) = 1$ für $j = 1, \ldots, n+1$, also

$$g_j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}.$$

- Vertauschungsfehler: $ggT(g_j - g_i, 9) = 1 \ \forall i \neq j$.

g_i	Mögliche $g_{j \neq i}$
	(+1, +2, +4, +5, +7, +8)
1	2, -, 5, -, 8, -
2	-, 4, -, 7, -, 1
4	2, 5, 8
5	1, 4, 7
7	2, 5, 8
8	1, 4, 7

1. Fall: 1 ist Gewicht. Dann sind noch die Gewichte $\{2, 5, 8\}$ zugelassen.

a) 2 ist Gewicht → 5,8 fallen weg

b) 5 ist Gewicht → 2,8 fallen weg

c) 8 ist Gewicht → 2,5 fallen weg

Also nur Gewichte aus jeweils $\{1, 2\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 8\}$.

2. Fall: 2 ist Gewicht. Dann sind noch die Gewichte $\{1, 4, 7\}$ zugelassen.

a) 1 ist Gewicht → 4,7 fallen weg

b) 4 ist Gewicht → 7,1 fallen weg

c) 7 ist Gewicht → 1,4 fallen weg

Also nur Gewichte aus jeweils $\{1, 2\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 7\}$.

3. Fall: 4 ist Gewicht. Dann sind noch die Gewichte $\{2, 5, 8\}$ zugelassen.

a) 2 ist Gewicht → 5,8 fallen weg

b) 5 ist Gewicht → 2,8 fallen weg

c) 8 ist Gewicht → 2,5 fallen weg

Also nur Gewichte aus jeweils $\{2, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 8\}$.

4. Fall: 5 ist Gewicht. Dann sind noch die Gewichte $\{1, 4, 7\}$ zugelassen.

a) 1 ist Gewicht → 4,7 fallen weg

b) 4 ist Gewicht → 1,7 fallen weg

c) 7 ist Gewicht → 1,4 fallen weg

Also nur Gewichte aus jeweils $\{1, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 7\}$.

5. Fall: 7 ist Gewicht. Dann sind noch die Gewichte $\{2, 5, 8\}$ zugelassen.

a) 2 ist Gewicht → 5,8 fallen weg

b) 5 ist Gewicht → 2,8 fallen weg

c) 8 ist Gewicht → 2,5 fallen weg

Also nur Gewichte aus jeweils $\{2, 7\}$, $\{5, 7\}$, $\{7, 8\}$.

6. Fall: 8 ist Gewicht. Dann sind noch die Gewichte $\{1, 4, 7\}$ zugelassen.

a) 1 ist Gewicht → 4,7 fallen weg

b) 4 ist Gewicht → 1,7 fallen weg

c) 7 ist Gewicht → 1,4 fallen weg

Also nur Gewichte aus jeweils $\{1, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{7, 8\}$.

Da alle Vertauschungsfehler erkannt werden sollen müssen die Gewichte paarweise verschieden sein.

$\rightarrow n = 1$.

Gewichtesmengen:

$\{1, 2\}$ $\{1, 5\}$ $\{1, 8\}$ $\{2, 4\}$ $\{2, 7\}$ $\{4, 5\}$ $\{4, 8\}$ $\{5, 7\}$ $\{7, 8\}$

(8 Punkte)