Klausur **21.04.2011**

Mathematik für Ingenieure C-III, Bachelor **Dauer: 90 min**

PD Dr. S. Kräutle / Dr. E. Marchand

Alle Teilaufgaben erfordern eine Rechnung oder eine Begründung; das Ergebnis alleine reicht keinesfalls. Ausnahme: Aufgaben 2-b und 4-b. Resultate aus Vorlesung/Übung können verwendet werden.

A1) (Extremwerte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^2 y + y^2 + x^2.$$

a) (i) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen (=potenziellen Extremstellen) von f im $\mathbb{R}^2$.
Anmerkung zu (i)/(ii): Eine der kritischen Stellen liegt bei $(0, 0)$.

(ii) Prüfen Sie, ob f an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt.

b) Bestimmen Sie nun für obige Funktion f das Maximum und das Minimum unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 3.$$

Hinweis zum Lösen des Lagrange-Gleichungssystems: Eliminieren Sie den Lagrange-Multiplikator λ, indem Sie eine der Gleichungen mit x und eine mit y multiplizieren.

(3+2+7=12 Punkte)

A2) (Lineare Programme)

a) Bringen Sie das folgende Lineare Programm (LP) auf Standard-Form:

Minimiere $x+y+z$ unter den Nebenbedingungen $x+y \leq 0,\ \ x+z \geq 1,\ \ y \geq 0$

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Hinweise: Es sind *keine* Begründungen erforderlich. Die Aussagen beziehen sich auf allgemeine LP in Standard-Form $f(\vec{x}) = \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \to \min, A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq \vec{0}$, also nicht speziell auf das LP aus (a). Jede richtige Antwort ergibt 1/2 Punkt, jede falsche 1/2 Minuspunkt. Jedoch wird eine negative Punktezahl aus A2-b nicht übertragen auf die Gesamtpunktezahl.

(A) Ist der zulässige Bereich $\{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq \vec{0}\}$ unbeschränkt, so folgt, dass das LP keine Lösung (in $\mathbb{R}$) hat.

(B) Ist der zulässige Bereich beschränkt und nichtleer, so hat das LP mindestens eine Minimalstelle.

(C) Ist der zulässige Bereich beschränkt und nichtleer, so hat das LP genau eine Minimalstelle.

(D) Eine zulässige Basislösung $\vec{x}_0$ ist genau dann eine Minimalstelle des LP, wenn für alle zulässigen Basislösungen $\vec{x}$ gilt $f(\vec{x}_0) \le f(\vec{x})$.

(E) Es gibt Lineare Programme, deren zulässiger Bereich leer ist.

(F) Sind $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ Minimalstellen eines LP, so ist auch $\alpha\,\vec{x}_1 + (1-\alpha)\,\vec{x}_2$ für alle $\alpha \in [0,1]$ Minimalstelle.

(4+3=7 Punkte)

A3) (Differentialgleichungen)

a) (i) Geben Sie ein Fundamentalsystem an für die Differentialgleichung

$$y''' - y' = 0.$$

(ii) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y''' - y' = 1, \quad y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0.$$

Hinweis: Es gibt eine partikuläre Lösung der Form $y_p(t) = \alpha t$.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2+6+6=14 Punkte)

A4) (Algebra)

a) Wie viele Elemente hat die Multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_{45}^*$?

b) Bestimmen Sie alle Elemente der Multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_{18}^*$.

c) Bestimmen Sie $[43]_{45}^3$ und $[5]_{18}^3$ und $[5]_{18}^{-1}$.

d) Ist es möglich, Gewichte $g_1, ..., g_n \in \{0, 1, ..., 17\}$, $n \ge 2$, anzugeben, so dass man mit der Prüfgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} g_i d_i \equiv 0 \pmod{18}$$

sowohl Einzelfehler als auch Nachbarvertauschungsfehler eines Datensatzes $(d_1, ..., d_n)$, $d_i \in \{0, 1, ..., 17\}$, sicher erkennt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(1+1+3+2=7 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)

Viel Erfolg!