Mathematik für Ingenieure C-III, Bachelor

Probeklausur/Sonderblatt

PD Dr. S. Kräutle / Dr. E. Marchand **21.02.2011**

- **Wer bisher weniger als die benötigten 130 Punkte hat, kann dieses Blatt bis zum 14. März bei Frau Marchand abgeben.** (Postfach von Frau Marchand ist im Sekretariat 11. Stock vorhanden; auch Abgabe per E-Mail `marchand@am.uni-erlangen.de` ist möglich.)
- Die 'echte' Klausur wird kürzer sein als dieses Sonderblatt und nur 4 Aufgaben umfassen.

A1) (Extremwerte)

a) Bestimmen Sie unter Verwendung des Lagrange-Formalismus das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x\,y$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Hinweis: Beim Lösen des Gleichungssystems unterscheiden Sie zwischen den Fällen $z \neq 0$ und $z = 0$.

b) Bestimmen Sie nun noch das Maximum und das Minimum der selben Funktion f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

(7+1=8 Punkte)

A2) (Lineares Programm)
Wir betrachten das Lineare Programm $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, warum die drei folgenden Vektoren $\vec{x}$ jeweils keine zulässigen Basislösungen dieses Linearen Programms sind.

$$\text{(i) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

A3) (Differentialgleichungen)
Bestimmen Sie die (reelle) Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'' + 4y' + 5y = 5 \qquad (1)$$

$$y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1 \qquad (2)$$

<u>Hinweis:</u> Es gibt eine partikuläre Lösung, die *konstant* ist. Welche?

(6 Punkte)

A4) (Algebra)

a) Bestimmen Sie alle Elemente der Multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_{21}^*$.

b) Bestimmen Sie $[20]_{21}^5$ und $[4]_{21}^{-1}$.

c) Es sei $g_6 = 1$. Geben Sie weitere Gewichte $g_1, ..., g_5 \in \{0, 1, ..., 20\}$ an, so dass man mit der Prüfgleichung

$$\sum_{i=1}^{6} g_i d_i \equiv 0 \pmod{21}$$

sowohl Einzelfehler als auch <u>Nachbar</u>vertauschungsfehler eines Datensatzes $(d_1, ..., d_5 | d_6)$, $d_i \in \{0, 1, ..., 20\}$, sicher erkennt.

(2+3+2=7 Punkte)

A5) (Differentialgleichungen)
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' = A\,\vec{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7 Punkte)

A6) (Differentialgleichungen)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{y}{t} + e^{\frac{y}{2t}}, \quad y(1) = 0.$$

Bemerkung: Es ist *nicht* verlangt zu erörtern, auf welchem maximalen Intervall die Lösung existiert.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$y' + y = t.$$

(4+4=8 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)