Mathematik für Ingenieure C-III, Bachelor

Probeklausur/Sonderblatt

PD Dr. S. Kräutle / Dr. E. Marchand **21.02.2011**

- **Wer bisher weniger als die benötigten 130 Punkte hat, kann dieses Blatt bis zum 14. Februar bei Frau Marchand abgeben.** (Postfach von Frau Marchand ist im Sekretariat 11. Stock vorhanden; auch Abgabe per E-Mail `marchand@am.uni-erlangen.de` ist möglich.)
- Die 'echte' Klausur wird kürzer sein als dieses Sonderblatt und nur 4 Aufgaben umfassen.

A1) (Extremwerte)

a) Bestimmen Sie unter Verwendung des Lagrange-Formalismus das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x\,y$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Hinweis: Beim Lösen des Gleichungssystems unterscheiden Sie zwischen den Fällen $z \neq 0$ und $z = 0$.

b) Bestimmen Sie nun noch das Maximum und das Minimum der selben Funktion f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

(7+1=8 Punkte)

Lösungsvorschlag.

a) Setze $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$; die Nebenbedingung wird dann durch $g(x,y,z) = 0$ beschrieben. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) - \lambda \cdot g(x,y,z)\\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x\,y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1)\end{aligned}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)}{\partial x} &= 2x-2y-\lambda\cdot 2x\\
\frac{\partial\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)}{\partial y} &= 2y-2x-\lambda\cdot 2y\\
\frac{\partial\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)}{\partial z} &= 2z-\lambda\cdot 2z\\
\frac{\partial\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda} &= -g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1.
\end{aligned}$$

Das System $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=\vec{0}$ [1] lautet also

$$\begin{aligned}
x-y &= \lambda x\\
y-x &= \lambda y\\
z &= \lambda z\\
x^2+y^2+z^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Wenn man die 3. Gleichung durch z teilt, bekommt man einen Wert für λ. Dies ist jedoch nur möglich wenn $z\neq 0$. Also Fallunterscheidung:

<u>Fall 1: $z\neq 0$</u> $\overset{(3.Gl.)}{\Longrightarrow} \lambda = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y=x\\ y-x=y\\ x^2+y^2+z^2=1\end{array}\right\} \Longrightarrow y=0, x=0, z=\pm 1$

Potenzielle Extremstellen also bei $(0,0,\pm 1)$

<u>Fall 2: $z=0$</u> Unter Addition der ersten beiden Gleichungen bekommen wir das System $\left\{\begin{array}{ll} \lambda\cdot(x+y)=0 & (1)\\ x-y=\lambda x & (2)\\ x^2+y^2=1 & (3)\end{array}\right\}$.

Fall 2-a: $\lambda=0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} x=y \overset{(3)}{\Longrightarrow} x=y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Fall 2-b: $\lambda\neq 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} x=-y \overset{(3)}{\Longrightarrow} x=-y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Potenzielle Extremstellen also bei $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0)$, $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\mp\sqrt{\frac{1}{2}},0)$

Um das Problem zu lösen, brauchen wir nur noch f an den potenziellen Extremstellen auszuwerten:

$f(0,0,\pm 1)=1$

$f(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}=0$

[1] also das System $f_x(x,y)-\lambda\, g_x(x,y,z)=0$, $f_y(x,y,z)-\lambda\, g_y(x,y,z)=0$,$f_z(x,y,z)-\lambda\, g_z(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$

$f(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \mp\sqrt{\frac{1}{2}}, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 2$
Es folgt: Das gesuchte Maximum ist 2, das Minimum ist 0.

b) Es reicht, neben dem Resultat von (a) noch nach kritischen Stellen *im Inneren* der Kugel, also unter $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, zu suchen:

$$\nabla f = 0 \iff x = y \wedge z = 0$$

$$f(x, x, 0) = x^2 + x^2 - 2x^2 = 0$$

Da alle alle globalen Extremstellen des Problems (b) entweder Extremstellen des Problems (a) oder kritische Stellen $\nabla f(x, y, z) = 0$ unter der NB $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ sind, bekommen wir als Lösung von (b):
Das Minimum ist $\min\{0, 0\} = 0$; das Maximum ist $\max\{0, 2\} = 2$.

A2) (Lineares Programm)
Wir betrachten das Lineare Programm $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, warum die drei folgenden Vektoren $\vec{x}$ jeweils keine zulässigen Basislösungen dieses Linearen Programms sind.

$$\text{(i) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

Lösung:
Vorüberlegung: Eine Basislösung des Linearen Programms $A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq \vec{b}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ist eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$, bei der $n - m$ Komponenten (die Nicht-Basis-Komponenten) gleich null sind. Eine Basis $\vec{x}$ ist zulässig, wenn außerdem $\vec{x} \geq \vec{0}$ gilt.
Link zur Hausaufgabe: Das Problem steht schon im Standard-Form. Für eine zulässige Basislösung räumt man $m = 3$ viele Komponenten von $\vec{x}$ in $\vec{x}_B$, die anderen $n - m = 5 - 3 = 2$ vielen, die 0 sein müssen, in $\vec{x}_N$. Deshalb kann es keine Basislösung geben mit weniger als 2 Null-Komponenten. Die Spalten von A sind verteilt in A_B und A_N wie die Komponenten von $\vec{x}$ in $\vec{x}_B$ und $\vec{x}_N$. Eine zulässige Lösung erfüllt die Nebenbedingungen, d.h. $\vec{x} \geq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}_B \geq \vec{0}$.

(i) Eine Komponente ist negativ $\Longrightarrow$ $\vec{x}$ ist nicht zulässig.

(ii) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{b}$
$\Longrightarrow$ keine Basislösung

(iii) $\vec{x}$ hat weniger als $n - m = 2$ Komponenten, die null sind
$\Longrightarrow$ keine Basislösung.

A3) (Differentialgleichungen)
Bestimmen Sie die (reelle) Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'' + 4y' + 5y = 5 \qquad (1)$$

$$y(0) = 1, \ \ y'(0) = 1 \qquad (2)$$

Hinweis: Es gibt eine partikuläre Lösung, die *konstant* ist. Welche?
(6 Punkte)

Lösung:
Zunächst die homogene Dgl. / Fundamentalsystem:
$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5 \stackrel{!}{=} 0$
$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$
$\Rightarrow \{e^{(-2+i)\,t}, e^{(-2-i)\,t}\}$ komplexes FS
$\Rightarrow \{e^{-2t}\cos t, e^{-2t}\sin t\}$ reelles FS

Nun eine partikuläre Lösung. Statt 'Trennung der Variablen' beachten wir den Hinweis: Man sieht sofort: $y_p(t) \equiv 1$ ist eine Lösung der inhomogenen Dgl. (oder ausführlicher: Den Ansatz $y_p(t) \equiv c$ in Dgl. einsetzen).
Es folgt:
Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(t) = 1 + \alpha e^{-2t}\cos t + \beta e^{-2t}\sin t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Nun zur Lösung des AWP. Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt die Bedingung $1 + \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 1$, also $\alpha = 0$.
Also $y(t) = 1 + \beta\, e^{-2t}\sin t$.
Um die Anfangsbedingung $y'(0) = 1$ verwenden zu können, leiten wir die Lösung ab: $y'(t) = \beta(-2\,e^{-2t}\sin t + e^{-2t}\cos t)$. Die Anfangsbedingung führt auf $\beta \cdot 1 = 1$. Also:

Lösung des AWP:

$$y(t) = 1 + e^{-2t}\sin t$$

A4) (Algebra)

a) Bestimmen Sie alle Elemente der Multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_{21}^*$.

b) Bestimmen Sie $[20]_{21}^5$ und $[4]_{21}^{-1}$.

c) Es sei $g_6 = 1$. Geben Sie weitere Gewichte $g_1, ..., g_5 \in \{0, 1, ..., 20\}$ an, so dass man mit der Prüfgleichung

$$\sum_{i=1}^{6} g_i d_i \equiv 0 \pmod{21}$$

sowohl Einzelfehler als auch Nachbarvertauschungsfehler eines Datensatzes $(d_1, ..., d_5 | d_6)$, $d_i \in \{0, 1, ..., 20\}$, sicher erkennt.

(2+3+2=7 Punkte)

Lösung:

a) $\mathbb{Z}_{21}^* = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$ (nämlich die zu 21 teilerfremden Zahlen zwischen 1 und 21).
[Zur Kontrolle:
– Die Elemente von $\mathbb{Z}_n^*$ liegen symmetrisch um $\frac{n}{2}$ verteilt
– $|\mathbb{Z}_{21}^*| = \varphi(21) = \varphi(7 \cdot 3) = \varphi(7) \cdot \varphi(3) = 6 \cdot 2 = 12$
]

b) Mit dem 'Trick' $20 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 21)$ vermeiden wir große Zahlen:
$[20]_{21}^5 = [-1]_{21}^5 = [(-1)^5]_{21} = [-1]_{21} = [20]_{21}$

Inverse bestimmen wir mit der 'Potenzen-Methode': $[4]_{21}^2 = [16]_{21}$
$[4]_{21}^3 = [16 \cdot 4]_{21} = [64]_{21} = [1]_{21}$
Es folgt: $[4]_{21}^{-1} = [4]_{21}^2 = [16]_{21}$

c) Die Bedingung lautet (s. Vorlesung/Übung):

$$[g_i] \in \mathbb{Z}_{21}^* \wedge [g_{i+1} - g_i] \in \mathbb{Z}_{21}^* \quad \forall i$$

also z.B. $g_6 = 1, g_5 = 2, g_4 = 4, g_3 = 5, g_2 = 10, g_1 = 11$. Diese Gewichte liegen alle in $\mathbb{Z}_{21}^*$, und die Differenzen benachbarter Gewichte sind 1,2,1,5,1, also ebenfalls in $\mathbb{Z}_{21}^*$.
(Auch 1,2,1,2,1,2 wäre eine zulässige Lösung; es gibt viele Lösungen.)

A5) (Differentialgleichungen)
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' = A\,\vec{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7 Punkte)

Lösung:
$p(\lambda) = (2-\lambda)^3 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 2$ ist einziger EW; algebraische Vielfachheit ist 3.
Eigenvektoren:

$$\mathrm{Eig}(2) = \mathrm{Kern}(A - 2E) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauß:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & |\underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & |\underline{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} |\underline{\mathbf{0}} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & |\underline{1} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & |\underline{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Eig}(2) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \qquad (**)$$

wähle den EV $\vec{v}_1 := (1,0,0)^T$.
Es 'fehlen' also noch 2 Hauptvektoren; es ist jetzt schon klar, dass es nur einer der Stufe 2 sowie einer der Stufe 3 zu suchen ist (denn der Lösungsraum des LGS (*) ist nur eindimensional, was sich schon aus der Rechnung (**) ergibt).

HV der Stufe 2:
$(A-2E)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$: $\qquad$ (*)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & |\underline{1} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & |\underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} |\underline{\mathbf{0}} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & |\underline{1} & 0 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{0} & 0 & |\underline{1} & \underline{0} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)^T$ ist ein (zu $\vec{v}_1$ passender) HV zweiter Stufe
(allg. ist $\vec{v}_2 \in \mathrm{span}\{\vec{v}_1\} + (0, \frac{1}{2}, 0)^T$ erlaubt.)

HV der Stufe 3:
$(A-2E)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & |\underline{1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & |\underline{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} |\underline{\mathbf{0}} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & |\underline{1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \mathbf{0} & 0 & |\underline{1} & \underline{\frac{1}{2}} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ ist ein (zu $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ passender) HV dritter Stufe
(allg. ist $\vec{v}_2 \in \operatorname{span}\{\vec{v}_1\} + (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ erlaubt.)

Also FS:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t},\ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t},\ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t},\ \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t},\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right\}$$

(Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ kann nun noch gestrichen werden.)

A6) (Differentialgleichungen)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{y}{t} + e^{\frac{y}{2t}}, \quad y(1) = 0.$$

Bemerkung: Es ist *nicht* verlangt zu erörtern, auf welchem maximalen Intervall die Lösung existiert.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$y' + y = t.$$

(4+4=8 Punkte)

Lösung:

a) Substitution $u(t) := \frac{y(t)}{t}$ (Vgl. Vorl./Übung) ergibt

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt}\frac{y(t)}{t} = \frac{1}{t}y'(t) - \frac{1}{t^2}y(t) \\ &\overset{(Dgl)}{=} \frac{1}{t}\left(\frac{y}{t} + e^{\frac{y}{2t}}\right) - \frac{y}{t^2} \\ &= \frac{1}{t}e^{\frac{u}{2}}, \qquad u(1) = \frac{y(1)}{1} = 0 \end{aligned}$$

[
Oder direkt mit Vorlesung: Dgl. $y' = f(\frac{y}{t})$ führt mittels $u(t) := \frac{y(t)}{t}$ auf Dgl. $u' = \frac{1}{t}(f(u) - u)$; hier: $f(u) = u + e^{\frac{u}{2}}$
$\Longrightarrow$ Dgl. $u' = \frac{1}{t}\left(u + e^{\frac{u}{2}} - u\right) = \frac{1}{t}e^{\frac{u}{2}}$
]

Die Dgl. für u wird mit Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned} \frac{du}{e^{\frac{u}{2}}} &= \frac{dt}{t} \quad | \text{ Int.} \\ \int_0^{u(t)} e^{-\frac{\eta}{2}}\, d\eta &= \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \\ \Rightarrow -2\, e^{-\frac{\eta}{2}}\, \Big|_0^{u(t)} &= \ln|\tau|\Big|_1^t \qquad | \cdot (-\frac{1}{2}) \qquad (*) \\ \Rightarrow e^{-\frac{u(t)}{2}} - 1 &= -\frac{1}{2}\ln t \\ \Rightarrow u(t) &= -2\ln\left[1 - \frac{1}{2}\ln t\right] \\ \Rightarrow y(t) &= t\,u(t) = -2t\ln\left[1 - \frac{1}{2}\ln t\right] \end{aligned}$$

Bemerkung: An der Stelle (*) sollte man nochmal zurück zur Aufgabenstellung schauen: Die Dgl. (sowohl die für y als auch die für u) ist nur für $t \neq 0$ definiert; da ferner ein Anfangspunkt $t_0 = 1 > 0$ gegeben ist, kann man grundsätzlich $t > 0$ voraussetzen. An der Stelle (*) kann man die Betragsstriche im Argument des Logarithmus also weglassen und $t > 0$ fordern.
Wenn hier noch nach dem maximalen Intervall, auf dem die Lösung existiert, gefragt worden wäre: Man hat die Bedingungen $t > 0$ und $1 - \frac{1}{2} \ln t > 0$. Die letztere lässt sich umstellen zu $t < e^2$. Also: $(0, e^2)$.
(Die obige Funktion ist sogar, wenn man unterwegs die Betragsstriche nicht weggestrichen hätte, auf ganz $(-\infty, e^2)$ definiert (sogar bei null(!) mittels stetiger Fortsetzung), jedoch ist sie bei $t = 0$ (wie man nachrechnen kann) nicht differenzierbar, somit nur auf $(-\infty, e^2) \setminus \{0\}$ Lösung der Dgl.)

b) Zuerst wird die *homogene* Dgl. $y' = -y$ gelöst. Der Lösungsraum wird aufgespannt von

$$y_{hom}(t) = e^{-t}$$

(das weiß man auswendig, oder man macht Trennung der Variablen, oder man nimmt Vorgehensweise zur Bestimmung eines FS für lineare Dgl. n-ter Ordnung; hier $n = 1$, also char. Polynom $p(\lambda) = \lambda + 1$ hat Nullstelle $\lambda = -1$, also FS $\{e^{-t}\}$)

Nun eine partikuläre Lösung mittels Variation der Konstanten:
Der Ansatz $y_p(t) := c(t) y_{hom}(t)$ führt, siehe Vorlesung, auf die Bedingung $c'(t) y_{hom}(t) = b(t)$; hier: $b(t) = t$. Also

$$c'(t) = \frac{b(t)}{y_{hom}(t)} = t\, e^t$$

$$\Longrightarrow c(t) = \int \tau\, e^\tau\, d\tau = t\, e^t - \int 1 \cdot e^\tau\, d\tau = t\, e^t - e^t$$

$$\Longrightarrow y_p(t) = c(t) y_{hom}(t) = t - 1$$

ist eine partikuläre Lösung. Also ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

$$y(t) = y_p(t) + c\, y_{hom}(t) = t - 1 + c\, e^{-t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$