Probeklausur Mathematik für Ingenieure C 4, Dr. W. Rathmann

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Die nachfolgende Tabelle gibt die FTP-Statistik eines Servers über einen gewissen Zeitraum an.

von/nach	i	Übertragungsvolumen v_i	Anzahl a_i der übertragenen Dateien	Durschnittliche Dateigröße x_i
A	1	1800	15	120
B	2	19000	25	760
C	3	14400	60	240

a) Bestimmen Sie die durschnittliche Dateigröße x_d über alle Übertragungen. Bestimmen Sie den Median und die Quartiele für die Daten in den letzten beiden Spalten.

b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis aus a) für n-Zielserver.

b1) in Abhängigkeit von x_i und a_i,

b2) in Abhängigkeit von x_i und v_i.

c) Interpretieren Sie b1) als gewichtetes arithmetische Mittel $\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$ und b2) gewichtetes harmonisches Mittel $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{x_i}\right)^{-1}$ und geben Sie jeweils ω_i an.

Lösung Aufgabe 1.

Probeklausur

Lösung Aufgabe 1:

a) $$\bar{x} = (\underbrace{15 \cdot 120}_{v_1} + \underbrace{25 \cdot 760}_{v_2} + \underbrace{60 \cdot 240}_{v_3}) \cdot \frac{1}{100} = (1800 + 19000 + 14400) \cdot \underline{\frac{1}{100}}$$

$$= \boxed{\left(\sum v_i\right) \cdot \frac{1}{\left(\sum a_i\right)}}$$

$$= 18 + 190 + 144 = \underline{252 \text{ kByte}}$$

$\sum a_i = 100$ 1P

$\bar{x} = 252$ 1P

b) Verallgemeinerung für n-Zielserver

i) in Abhängigkeit von x_i, a_i

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1}$$ 1P

ii) Es gilt: $v_i = a_i \cdot x_i$ 1P

$$a_i = \frac{v_i}{x_i}$$

n-Zielserver in Abhängigkeit von x_i, v_i

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{x_i}\right)^{-1}$$ 1P

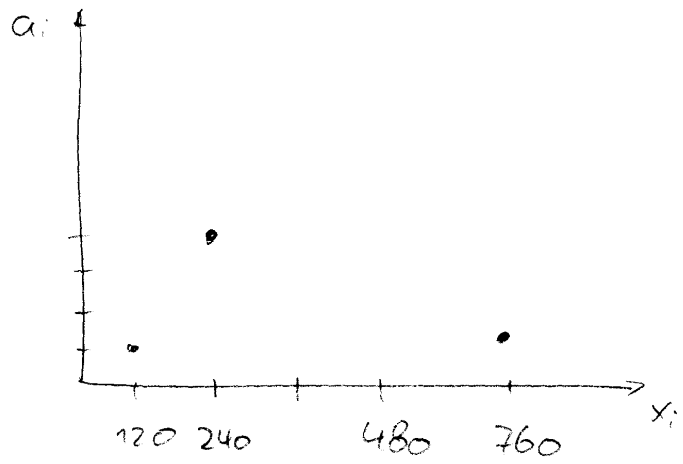
c) aus b1): $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$ mit $\omega_i = \frac{a_i}{\sum a_i}$ 1P

aus b2) $\bar{x}$ ist ein gewichtetes harmonisches Mittel

mit $$\bar{x} = \frac{\sum v_j}{\sum_i \frac{v_i}{x_i}} \overset{1P}{=} \frac{1}{\sum_i \frac{\frac{v_i}{\sum v_j}}{x_i}} \overset{!}{=} \frac{1}{\sum \frac{\omega_i}{x_i}}$$

$$\omega_i = \frac{v_i}{\sum v_j}$$ 1P

a2) Median, Quartile von (x_i, a_i)



$\sum a_i = 100$

Median $\tilde{x} = 240$

$u_{0,25} = 240$

$u_{0,75} = 240$ oder $u_{0,75} = 760$ 2P

□

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Ein Student fährt täglich mit dem Fahrrad zur Uni. Er kommt mit einer Wahrscheinlichkeit $0,1 < \alpha < 0,5$ pünktlich (V) [bzw. mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ zu spät (S)] an, wenn er beim letzten Mal pünktlich kam. Ist er dagegen beim letzten Mal zu spät angekommen, dann kommt er mit Wahrscheinlichkeit $0.1 < \beta < 0.5$ wiederum zu spät.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

b) Geben Sie die Übergangsmatrix P an und zeigen Sie, dass die Matrix P die Eigenwerte 1 und $(\alpha + \beta) - 1$ besitzt.

c) Besitzt die homogene Markow-Kette einen Gleichgewichtsverteilung und geben Sie diese ggf. an.

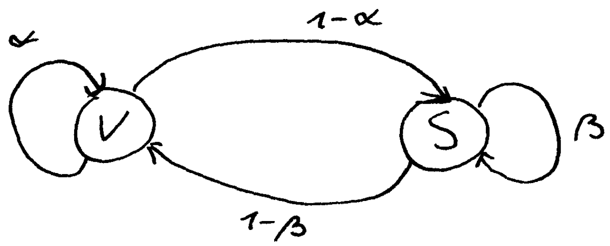
d) Bestimmen Sie P^n.

Lösung Aufgabe 2.

Probeklausur

Lösung Aufgabe 2

a) $\alpha, \beta \in (0{,}1\ ,\ 0{,}5)$



1P

b) $P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$ 1P

Berechnung der Eigenwerte

$$p(\lambda) = (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda) - (1-\alpha)(1-\beta)$$

$$= \lambda(\lambda-(\alpha+\beta)) + \alpha+\beta-1 = \lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda + (\alpha+\beta)-1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2}{4} - (\alpha+\beta)+1} = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \frac{1}{2}(\alpha+\beta-2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \alpha+\beta-1\ ,\quad \lambda_2 = 1$$

2P

c) Zur Bestimmung der GGV wird der EV zu $\lambda_2 = 1$ benötigt.
($|\lambda_1| \neq 1$ da $\alpha, \beta < 0{,}5$)

$v_2 = P^T v_2$ bzw. $(P^T - I)v_2^T = 0$

Gauß-Schritt

$$\begin{pmatrix} \alpha-1 & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta-1 \end{pmatrix} v_2^T = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \alpha-1 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = \mu \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\beta}{\alpha-1}\mu \Rightarrow v_2 = \mu\left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}, 1\right)$$

es genügt $\mu_2 = 1$ zu betrachten, d.h. $v_2 = \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}, 1\right)$ 1P

wird verwendet. Die Einträge von v_2 sind positiv.

Die Markow-Kette besitzt eine GGV, da sie nur einen EW mit Betrag 1 besitzt. Für die GGV muss gelten:

$$\mu\frac{\beta-1}{\alpha-1} + \mu = 1 \Rightarrow \mu = \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1} + 1\right)^{-1}$$

$$\pi = \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}, 1\right)^{-1}\left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}, 1\right)$$ 1P

(Links)

d) Es wird noch der EV zu EW $\lambda_1 = \alpha+\beta-1$ benötigt.
Der lässt sich ablesen: $v_1 = (1, -1)$ 1P

Es gilt: $D = U P U^{-1}$ und $U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ 1P

v_1 und v_2 sind Zeilenvektoren!

Daraus folgt: $P = U^{-1} D U$

$$\Rightarrow P^n = U^{-1} D^n U = \underbrace{U^{-1} D U \cdot \ldots \cdot U^{-1} D U}_{n\text{-mal}}$$

$$\Rightarrow P^n = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\beta}{\alpha-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots$$

$$\ldots \begin{pmatrix} (\alpha+\beta-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\beta-1}{\alpha-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\beta}{\alpha-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha+\beta-1)^n & -(\alpha+\beta-1)^n \\ \frac{\beta-1}{\alpha-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} (\alpha+\beta-1)^n + \frac{\beta-1}{\alpha-1} & -(\alpha+\beta-1)^n + 1 \\ (\alpha+\beta-1)^n \frac{1-\beta}{\alpha-1} + \frac{\beta-1}{\alpha-1} & (\alpha+\beta-1)^n \frac{\beta-1}{\alpha-1} + 1 \end{pmatrix}$$

1P

mit $\det U = 1 + \frac{\beta-1}{\alpha-1}$ 1P

$\square$

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

In einer Getränkeabfüllanlage wird Limonade (L), Kola (K) und Wasser (W) abgefüllt. Der Abfüllprozess unterliegt natürlichen Schwankungen, die stoachstisch unabhängig normalverteilt seien. L sei $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, K sei $\mathcal{N}(0, 1)$ und W sei $\mathcal{N}(0, \frac{1}{4})$ normalverteilt.
Durch Benutzung derselben Maschinen kommt es zu Folgefehlern:

$$\begin{aligned} Z_1 &= aL + 2K + 1, \\ Z_2 &= 5L - K + aW, \end{aligned}$$

mit einer reellen Maschinengröße a.

a) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $Z = (Z_1, Z_2)$.

b) Geben Sie die Riemann-Dichte von Z an.

c) Bestimmen Sie die Randverteilungen Z_i, $i = 1, 2$.

d) Geben Sie die Kovarianz $\mathrm{Kov}(Z_1, Z_2)$ an und interpretieren Sie diese (in Abhängigkeit von a).

Lösung Aufgabe 3.
Wir definieren den Zufallsvektor X als $X = (L, K, W)$. Dann ist X $\mathcal{N}(0, K_X)$ verteilt, mit

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

a) Die gemeinsame Verteilung von Z erhalten wir aus der linearen Transformation $Z = b + A \cdot X$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 5 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Dann ist Z $\mathcal{N}(c, K_Z)$ verteilt mit

$$c = b + A \cdot 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

und

$$K_Z = AK_XA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 + 4 & \frac{5}{2}a - 2 \\ \frac{5}{2}a - 2 & \frac{27}{2} + \frac{1}{4}a^2 \end{pmatrix}.$$

b) Die Dichtefunktion der n-dimensionalen Normalverteilung $\mathcal{N}(a, K)$ ist allgemein definiert

$$f^X(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^T K^{-1}(x-a)}.$$

In unserem Fall ist $n = 2$, $K = K_Z$ wie oben und $a = (1, 0)^T$.

c) Die Randverteilungen von mehrdimensionalen Normalverteilungen sind wieder Normalverteilungen. Ist die Zufallsvariable $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ $\mathcal{N}(a, K)$ verteilt, so ist die i-te Projektion Z_i $\mathcal{N}(a_i, k_{ii})$-verteilt. Also ist in unserem Fall Z_1 $\mathcal{N}(1, \frac{1}{2}a^2 + 4)$ und Z_2 $\mathcal{N}(0, \frac{27}{2} + \frac{1}{4}a^2)$ verteilt.

d) Die Kovarianz ist $\mathrm{Kov}(Z_1, Z_2) = \frac{5}{2}a - 2$. Es gilt folgende Fallunterscheidung:
Für $a < \frac{4}{5}$ ist $\mathrm{Kov}(Z_1, Z_2) < 0$ und es besteht ein gegensinnigen linearen Zusammenhang

von Z_1 und Z_2.
Für $a = \frac{4}{5}$ ist $\text{Kov}(Z_1, Z_2) = 0$ und Z_1 und Z_2 sind stoachstisch unabhängig (gilt nur bei Normalverteilung!).
Für $a > \frac{4}{5}$ ist $\text{Kov}(Z_1, Z_2) > 0$ und es besteht ein linearer Zusammenhang von Z_1 und Z_2.

$\square$

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

a) 30% der Patienten, die an einer speziellen Krankheit erkrankt sind, reagieren positiv auf ein von der Krankenschwester verabreichtes Placebo. Bei einem Experiment mit 10 Patienten soll überprüft werden, ob sich die Wirkung des Placebos ändert, wenn es vom Oberarzt überreicht wird.

   a) Welcher Verteilung unterliegt die Zufallsvariable

   $$X = \text{„Anzahl der Patient, die auf Placebo ansprechen“?}$$

   b) Geben Sie den Hypothesentest an. Wie wählen Sie den kritischen Bereich, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit nicht größer als 5% sein darf.

b) Ein Hausmeister kontrolliert in einem großen Gebäude wöchentlich die Glühbirnen und wechselt die ausgebrannten Birnen aus. In der k-ten Woche von insgesamt m Wochen hat er n_k Birnen ausgetauscht. Schätzen Sie die mittlere Brenndauer der Glühbirnen, wenn sich im Gebäude insgesamt N Birnen befinden, die alle vom gleichen Typ sind und deren Brenndauer st.u. und identisch -Exp(λ)-verteilt sind. Da die Exponentialverteilung kein Gedächtnis hat, tun Sie so, als ob am Ende jederWoche alle Birnen neu eingesetzt werden.

Lösung Aufgabe 4.

Probeklausur

Lösung Aufgabe 4a)

4aa) Verteilung: $X \sim B(0{,}3,\ 10)$

4ab) Hypothesentest

1.) $H_0: \mu_0 = \mu = 0{,}3$

2) $\alpha = 0{,}05$

3) Prüfgröße: $E(X) = np$; Schätzung: $n\hat{X} = \sum X_i$; $\hat{X} \sim B(n,p) = B(10; 0{,}3)$

4) Als kritischer Bereich wird c_1 und c_2 so gewählt, daß

$$P(c_1 \le X \le c_2) = 1-\alpha$$

ist. Wobei möglichst

$$P(X \le c_1) = \tfrac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad P(X \ge c_2) = \tfrac{\alpha}{2}$$

gelten soll.

Suche c_1; c_2 derart, dass sie den Perzentilen mit $P(X \le b_{0{,}025}) \approx \frac{\alpha}{2}$; $P(X > b_{0{,}975}) \approx \frac{\alpha}{2}$ entsprechen

Aus der Tabelle folgt:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 6$$

Dann ist $\quad P(c_1 \le X \le c_2) \approx 0{,}95$

Probeklausur

Lösung Aufgabe 4b)

In der Woche k fallen n_k Birnen aus,
$N-n_k$ Birnen fallen nicht aus

- Die Brenndauer der Glühbirnen ist st. u.

Anwenden der Maximum-Likelihood-Methode

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} P(T \leq 1)^{n_k} P(T \geq 1)^{N-n_k}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1-e^{-\lambda})^{n_k} e^{-\lambda(N-n_k)}$$

$$= (1-e^{-\lambda})^{\Sigma n_k} e^{-\lambda(mN - \Sigma n_k)}$$

$$\overset{\Sigma n_k = n}{=} (1-e^{-\lambda})^{n} e^{-\lambda(mN-n)}$$

Logarithmieren

$$l(\lambda) := \ln L(\lambda) = n \ln(1-e^{-\lambda}) - (mN-n)\lambda$$

$$l'(\lambda) = \frac{ne^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} - (mN-n) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad n e^{-\hat{\lambda}} = (mN-n)(1-e^{-\lambda})$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \ln\left(1 + \frac{n}{mN-n}\right) = \ln\left(\frac{mN}{mN-n}\right)$$

$\Rightarrow \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} = \mu$ damit ist die Schätzung für die mittlere Brenndauer: $\hat{\mu} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \left(\ln\left(\frac{mN}{mN-n}\right)\right)^{-1}$

$\square$