Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor **SoSe 2019**
(INF,IP,ILS) **Montag, 07.10.2019**
Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.
Für alle Ergebnisse muss der Rechenweg mit angegeben werden.

A1) (Grenzwerte von Funktionen)

Berechnen Sie

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\alpha+\beta x)-\ln(\alpha+\gamma x)}{\tan(\delta x)}$, wobei $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\cos(x)}-\cos(x)}{e^x\,(x-1)+1}$

(3+3=6 Punkte)

Lösung:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(\alpha+\beta x)}^{\to\ln\alpha}-\overbrace{\ln(\alpha+\gamma x)}^{\to\ln\alpha}}{\underbrace{\tan(\delta x)}_{\to 0}} \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta x}-\frac{\gamma}{\alpha+\gamma x}}{\delta\,(1+\tan^2(\delta x))}$$

$$\overset{\text{(vereinf.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\beta(\alpha+\gamma x)-\gamma(\alpha+\beta x)}{\delta(1+\tan^2(\delta x))(\alpha+\beta x)(\alpha+\gamma x)} \overset{\text{(vereinf.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\delta(1+\tan^2(\delta x))(\alpha+\beta x)(\alpha+\gamma x)} = \underline{\underline{\frac{\beta-\gamma}{\delta\alpha}}}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{e^{\overbrace{1-\cos(x)}^{\to 1-\cos(0)=0}}-\overbrace{\cos(x)}^{\to\cos(0)=1}}^{\to e^0-1=0}}{\underbrace{e^x\,(x-1)+1}_{\to e^0\cdot(-1)+1=0}} \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\,e^{1-\cos(x)}+\sin(x)}{e^x(x-1)+e^x} \overset{\text{(vereinf.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\,e^{1-\cos(x)}+\sin(x)}{x\,e^x} \overset{(*)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos(x)}+1}{e^x} = 1\cdot\frac{1+1}{1} = \underline{\underline{2}}$$

<u>Variante</u>: Wenn man an der Stelle (*) den Term $\frac{\sin x}{x}$ nicht herauszieht, kommt man auch mittels "nochmal l'Hospital" weiter:

$$(*) \overset{\text{(Hosp.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\,e^{1-\cos(x)}+\sin(x)\,e^{1-\cos(x)}\sin(x)+\cos(x)}{e^x+x\,e^x} = \frac{1\cdot e^0+0+1}{1+0} = 2$$

A2) (Potenzreihen)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{2}{k}}\right)^{3k} x^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\tfrac{3}{k}\right)^{2k^2} x^{3k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9^k x^k}{(3k^2+2)\sqrt{5^k}}$

Hinweis zu c): Zunächst den Folgengrenzwert $a := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3k^2+2}$ per Einschachtelung bestimmen.

(3+3+3=9 Punkte)

Lösung:

a) $\sqrt[k]{|a_k|} = \left| \left(\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{2}{k}} \right)^{3k} \right|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2^3} \cdot \left(\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \right)^3 \xrightarrow{(k\to\infty)} \frac{1}{8} \cdot 1^3$

$\Longrightarrow R = \underline{\underline{8}}$

b) Variante 1:

Substitution $y := x^3$ führt auf die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{k}\right)^{2k^2} y^k$.

Deren Konvergenzradius R_y:

$\sqrt[k]{|a_k|} = \left| \left(1+\frac{3}{k}\right)^{2k^2} \right|^{\frac{1}{k}} = \left(1+\frac{3}{k}\right)^{2k} = \left(\left(1+\frac{3}{k}\right)^k \right)^2 = (e^3)^2 = e^6$

$\Longrightarrow \quad R_y = e^{-6}$

d.h. für $|y| < e^{-6}$ konvergiert die Reihe und für $|y| > e^{-6}$ divergiert sie.

Rücksubstitution $y = x^3$:

Für $|x^3| < e^{-6}$ konvergiert die Reihe und für $|x^3| > e^{-6}$ divergiert die gegebene Reihe, d.h.

Für $|x| < e^{-2}$ konvergiert die Reihe und für $|x| > e^{-2}$ divergiert sie.

Also: $R = \underline{\underline{e^{-2}}}$

Variante 2:

Die gegebene Reihe schreibt man als $\sum\limits_{\tilde{k}=1}^{\infty} a_{\tilde{k}}\, x^{\tilde{k}}$ wobei $a_{\tilde{k}} = 0$ für alle $\tilde{k}$, die nicht durch 3 teilbar sind, und (was man per Setzung $3k =: \tilde{k}$ bekommt) $a_{\tilde{k}} = (1 + 9/\tilde{k})^{2\tilde{k}^2/9}$ für durch 3 teilbare $\tilde{k}$.

Die Folge $\sqrt[\tilde{k}]{|a_{\tilde{k}}|} = \begin{cases} (1+9/\tilde{k})^{2\tilde{k}/9} & ,\tilde{k} \text{ durch 3 teilbar} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

hat die Häufungspunkt 0 und $(e^9)^{\frac{2}{9}} = e^2$, somit den Limes Superior e^2, somit $R = e^{-2}$.

c) Einschachtelung $\sqrt[k]{3k^2} \le \sqrt[k]{3k^2+2} \le \sqrt[k]{3k^2+k^2}\, \forall k \ge 2$.

Somit: $\sqrt[k]{3} \cdot (\sqrt[k]{k})^2 \le \sqrt[k]{3k^2+2} \le \sqrt[k]{4} \cdot (\sqrt[k]{k})^2\, \forall k \ge 2$

Darauf " $\lim\limits_{k\to\infty}$ " angewandt ergibt:

$1 \cdot 1^2 \le \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3k^2+2} \le 1 \cdot 1^2$,

somit $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3k^2+2} = 1$.

Nun zur Reihe:

$\sqrt[k]{|a_k|} = \left| \frac{9^k}{(3k^2+2)\sqrt{5}^k} \right|^{1/k} = \frac{9}{\sqrt[k]{3k^2+2}\,\sqrt{5}} \xrightarrow{(k\to\infty)} \frac{9}{1\cdot\sqrt{5}}$,

somit $R = \underline{\underline{\frac{1}{9}\sqrt{5}}}$

A3) (Extremwerte, Nullstellen)

a) Wir betrachten die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 3\ln x\,,$$

auf dem Intervall $D_f = (0, e]$.

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f auf dem Intervall D_f.

(ii) Existieren das globale Maximum und das globale Minimum von $f : D_f \to \mathbb{R}$, und wenn ja, welchen Wert haben sie?

b) Es sei $\lambda > 0$ ein Parameter. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = 4x - (1 + 3x)\,e^{-\lambda x}$$

auf dem Intervall $I = (0, 1)$ *genau eine* Nullstelle hat.

(5+5=10 Punkte)

Lösung:

a) $f(x) = x^3 - 3\ln x$ mit $x \in D_f = (0, e]$.

$\rightsquigarrow\ f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x}$

Das Kriterium $f'(x) = 0$ (notwendiges Kriterium für lokale Extremstellen, aber nur für solche, die im Inneren von D_f liegen) führt auf $x^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 = 1 \overset{x\in D_f}{\Longleftrightarrow} x = 1$.

Also können sich bei $x = 1$ und am Randpunkt $x = e$ lokale Extremstellen befinden.

Mittels Berechnung von $f(1) = 1$, $f(e) = e^3 - 3 > 1 = f(1)$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ verschafft man sich einen Überblick über den Funktionsverlauf (ggf. berechnet man auch $f''(1) = 9 > 0$) und kommt so zu dem Schluss:

An der Stelle $x = 1$ liegt das lokale/globale Minimum, dessen Wert ist gleich 1, an der Stelle $x = e$ liegt ein lokales Maximum, und ein globales Maximum existiert nicht.

Hinweis zur Bepunktung: Hier soll eine lückenlose Argumentationskette nicht so entscheidend sein, um volle Punktzahl zu bekommen.

b) $f(x) = 4x - (1 + 3x)\, e^{-\lambda x}$

Teil 1:

$f(0) = 0 - 1 \cdot e^0 = -1 < 0$ und $f(1) = 4 - 4 \cdot e^{-\lambda} = 4\,\underbrace{(1 - e^{-\lambda})}_{>0} > 0$ (wobei $\lambda > 0$ verwendet wurde) und f ist stetig

$\Longrightarrow\quad f$ hat auf $(0, 1)$ *mindestens* eine Nullstelle.

Teil 2:

$f'(x) = 4 - 3\,e^{-\lambda x} + \underbrace{(1 + 3x)\,\lambda\, e^{-\lambda x}}_{>0} > 4 - 3\,\underbrace{e^{-\lambda x}}_{<1} > 1 > 0$

$\rightsquigarrow\ f$ ist streng monoton auf $[0, 1]$ $\rightsquigarrow\ f$ hat auf $(0, 1)$ *höchstens* eine Nullstelle.

A4) (Integrale)

Berechnen Sie:

a)
$$\int_0^1 \frac{x^{5/2}}{e^{1+2x^{7/2}}}\,dx$$

b)
$$\int_3^4 \frac{5x-19}{(x-2)(x-5)}\,dx$$

c)
$$\int (\ln x)^2 \, \frac{1}{x^2}\,dx$$

(3+4+4=11 Punkte)

Lösung:

a) Mit der Substitution $u := 1 + 2x^{\frac{7}{2}}$, also $\frac{du}{dx} = 7\,x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{1}{7}\,du$ und der Transformation der Grenzen $x=0 \leadsto u=1$, $x=1 \leadsto u=3$
bekommt man
$\int\limits_0^1 \frac{x^{5/2}}{e^{1+2x^{7/2}}}\,dx = \int\limits_1^3 \frac{1}{7}\,e^{-u}\,du = -\frac{1}{7}e^{-u}\Big|_1^3 = \underline{\underline{\frac{1}{7}\left(e^{-1} - e^{-3}\right)}}$

b) Partialbruchzerlegung:
$\frac{5x-19}{(x-2)(x-5)} \overset{!}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} \qquad (*)$
Man findet A, B, indem man zum einen mit $(x-2)$ multipliziert und dann $x \to 2$, und zum anderen mit $(x-5)$ multipliziert und dann $x \to 5$. Man bekommt
$A = \frac{5\cdot 2-19}{2-5} = \frac{-9}{-3} = 3$ und $B = \frac{5\cdot 5-19}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$
$\leadsto \int\limits_3^4 \frac{5x-19}{(x-2)(x-5)}\,dx = \int\limits_3^4 \frac{3}{x-2}\,dx + \int\limits_3^4 \frac{2}{x-5}\,dx$
$= 3\ln|x-2|\big|_3^4 + 2\ln|x-5|\big|_3^4 = 3(\ln 2 - \ln 1) + 2(\ln 1 - \ln 2) = \underline{\underline{\ln 2}}$

<u>Variante</u>: Man multipliziert (*) mit dem 'Hauptnenner' durch:
$\leadsto\ 5x - 19 = A(x-5) + B(x-2) = (A+B)\,x - 5A - 2B$
Koeffizientenvergleich: $\leadsto A + B = 5\ \wedge\ 5A + 2B = 19\ \leadsto\ A = 3, B = 2...$

c) <u>Variante 1</u>: Zweimal partiell integrieren:
$\int \underbrace{(\ln x)^2}_{\text{abl.}}\ \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{int.}}\ dx \overset{\text{(p.I.)}}{=} (\ln x)^2(-\frac{1}{x}) - \int \frac{2\ln x}{x}\,(-\frac{1}{x})\,dx = -\frac{1}{x}\,(\ln x)^2 + \int \underbrace{2\ln x}_{\text{abl.}}\ \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{int.}}\ dx$
$= -\frac{1}{x}\,(\ln x)^2 + 2\ln x(-\frac{1}{x}) - \int \frac{2}{x}\,(-\frac{1}{x})\,dx = -\frac{1}{x}\,(\ln x)^2 - \frac{1}{x}\cdot 2\ln x + \int \frac{2}{x^2}\,dx$
$= \underline{\underline{-\frac{1}{x}\left[(\ln x)^2 + 2\ln x + 2\right]}}$

<u>Variante 2</u>: Zuerst Substitution $u := \ln x$, danach zweimal partiell integrieren:
$\int (\ln x)^2\,\frac{1}{x^2}\,dx \overset{\text{(subst.)}}{=} \int \underbrace{u^2}_{\text{abl.}}\ \underbrace{e^{-u}}_{\text{int.}}\ du \overset{\text{(p.I.)}}{=} -u^2\,e^{-u} + \int \underbrace{2u}_{\text{abl.}}\ \underbrace{e^{-u}}_{\text{int.}}\ du$
$\overset{\text{(p.I.)}}{=} -u^2\,e^{-u} - 2u\,e^{-u} + \int 2\,e^{-u}\,du = -e^{-u}\,(u^2+2u+2) = -\frac{1}{x}\left[(\ln x)^2 + 2\ln x + 2\right]$

A5) (Taylor-Entwicklung)

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^{3/2} \left(\ln(x) - \frac{2}{3} \right) + x^2 \,.$$

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = 1$ das Taylor-Polynom T_2 zweiten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_2 aus a) das Restglied $R_2(x)$ an.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_2 an der Stelle $x = 2$. Diese Schranke soll die Form $|R_2(2)| \leq c$ haben, für ein zu bestimmendes $c \geq 0$.

(4+2+2=8 Punkte)

Lösung:

a) $f(x) = x^{3/2}\left(\ln(x) - \frac{2}{3}\right) + x^2$
$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(\ln(x) - \frac{2}{3}) + x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} + 2x = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln(x) + 2x$
$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}\ln(x) + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2$

$f(1) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}, \quad f'(1) = 2, \quad f''(1) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{T_2(x) = \frac{1}{3} + 2\,(x-1) + \frac{7}{4}\,(x-1)^2}}$$

b) $f'''(x) = -\frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}}\ln(x) + \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}}\ln(x)$

$$R_2(x) \;=\; \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_*)^3 = \underline{\underline{-\frac{3\ln\xi}{6\cdot 8\cdot \xi^{\frac{3}{2}}}\,(x-1)^3\,, \quad \text{wobei } \xi \text{ zwischen 1 und } x \text{ liegt.}}}$$

c) $R_2(2) = -\frac{\ln\xi}{16\,\xi^{\frac{3}{2}}}$ wobei $\xi \in (1,2)$
$\rightsquigarrow \ |R_2(2)| = \frac{\ln\xi}{16\,\xi^{\frac{3}{2}}} \le \frac{\ln 2}{16\cdot 1^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln 2}{16}$
Sinnvolle Ergebnisse sind somit $\underline{\underline{c = \frac{\ln 2}{16}}}$ oder auch $c = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$ (da $\ln 2 \le 1$)

Bemerkung: Man kann auch eine Kurvendiskussion für die Funktion $\xi \mapsto \frac{\ln\xi}{16\,\xi^{\frac{3}{2}}}$, $\xi \in [1,2]$, durchführen, findet die Maximalstelle $\xi = e^{\frac{2}{3}} \in (1,2)$ und den zugehörigen Maximalwert $c = \frac{1}{24e} \approx \frac{1}{65}$ (wenn ich mich nicht verrechnet habe), aber ein solcher Aufwand war hier nicht erwartet worden.

(Summe: 44 Punkte)

**** Viel Erfolg ****