**Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor** **SoSe 2019**
**(INF,IP,ILS)** **Montag, 07.10.2019**
**Prof. Dr. S. Kräutle** **Dauer: 90 min**

***Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.***
***Für alle Ergebnisse muss der Rechenweg mit angegeben werden.***

## A1) (Grenzwerte von Funktionen)

Berechnen Sie

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\alpha+\beta x) - \ln(\alpha+\gamma x)}{\tan(\delta x)}$ , wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - \cos(x)}{e^x\,(x-1)+1}$

(3+3=6 Punkte)

## A2) (Potenzreihen)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius $R$ der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{2}{k}}\right)^{3k} x^k$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{3}{k}\right)^{2k^2} x^{3k}$

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{9^k x^k}{(3k^2+2)\sqrt{5^k}}$

Hinweis zu c): Zunächst den Folgengrenzwert $a := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3k^2+2}$ per Einschachtelung bestimmen.

(3+3+3=9 Punkte)

## A3) (Extremwerte, Nullstellen)

a) Wir betrachten die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 3\ln x\,,$$

auf dem Intervall $D_f = (0, e]$.

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von $f$ auf dem Intervall $D_f$.

(ii) Existieren das globale Maximum und das globale Minimum von $f : D_f \to \mathbb{R}$, und wenn ja, welchen Wert haben sie?

b) Es sei $\lambda > 0$ ein Parameter. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = 4x - (1 + 3x)\, e^{-\lambda x}$$

auf dem Intervall $I = (0, 1)$ *genau eine* Nullstelle hat.

(5+5=10 Punkte)

**A4) (Integrale)**

Berechnen Sie:

a) $$\int_0^1 \frac{x^{5/2}}{e^{1+2x^{7/2}}}\, dx$$

b) $$\int_3^4 \frac{5x - 19}{(x-2)(x-5)}\, dx$$

c) $$\int (\ln x)^2 \frac{1}{x^2}\, dx$$

(3+4+4=11 Punkte)

**A5) (Taylor-Entwicklung)**

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^{3/2} \left( \ln(x) - \frac{2}{3} \right) + x^2 .$$

a) Stellen Sie für obige Funktion $f$ zum Entwicklungspunkt $x_* = 1$ das Taylor-Polynom $T_2$ zweiten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom $T_2$ aus a) das Restglied $R_2(x)$ an.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied $R_2$ an der Stelle $x = 2$. Diese Schranke soll die Form $|R_2(2)| \leq c$ haben, für ein zu bestimmendes $c \geq 0$.

(4+2+2=8 Punkte)

(Summe: 44 Punkte)

**** Viel Erfolg ****