Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor (INF,IP,ILS) **SoSe 2019**
Prof. Dr. S. Kräutle **Montag, 15.06.2020**
Dauer: 90 min

Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.
Für alle Ergebnisse muss der Rechenweg mit angegeben werden.

A1) (Grenzwerte von Funktionen)

Berechnen Sie die Grenzwerte

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\alpha x}-1+\alpha x}{e^{\beta x}-1-\beta x} \quad , \quad \text{wobei } x>0 \text{ und } \alpha,\beta>0$$

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-\cos x}-1}{x^2}$$

c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha\sqrt{x}+\frac{\beta}{x}}{\gamma\sqrt{x}+\frac{\delta}{x}} \quad , \quad \text{wobei } x>0 \text{ und } \alpha,\beta,\gamma,\delta>0$$

(3+3+3=9 Punkte)

A2) (Grenzwerte von Folgen u. Konvergenzradius von Potenzreihe)

a) Berechnen Sie die Grenzwerte

(i)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\sqrt{n}+\frac{\beta}{n}}{\gamma\sqrt{n}+\frac{\delta}{n}} \quad , \quad \text{wobei } \alpha,\beta,\gamma,\delta>0$$

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{nx}\right)^{4n} \quad , \quad \text{wobei } x\neq 0$$

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(3\sqrt[k]{\frac{2}{k}}+\frac{5}{\sqrt[k]{k!}}\right)^k x^k$$

(2+2+2=6 Punkte)

A3) (Nullstellen)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sin(x)\exp(\tfrac{2x}{\pi}) + \frac{2\cos(x)}{\pi} - 2$$

auf dem Intervall $I = (0, \frac{\pi}{2})$ *genau eine* Nullstelle hat.

(5 Punkte)

A4) (Integrale)

Berechnen Sie mittels Substitutionsregel und/oder Partieller Integration:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 6\,(2x+1)^{-4}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx \qquad (x>0)$

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^3}\,dx$ d) $\displaystyle\int \sin(nx)\,e^x\,dx\,, \quad \text{wobei } n\in\mathbb{N}$

<u>Bemerkung:</u> Es ist *nicht* gestattet, das Ergebnis ohne Rechnung einer Formelsammlung zu entnehmen.

(2+2+4+4=12 Punkte)

A5) (Taylor-Entwicklung)

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x\,(\ln x)^2\ .$$

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* := e$ das Taylor-Polynom T_2 zweiten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_2 aus a) das Restglied $R_2(x)$ an.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_2 an der Stelle $x := 2e$. Diese Schranke soll die Form $|R_2(2e)| \le c$ haben, für ein konkret anzugebendes $c \ge 0$. (Wenn das c Terme wie 'e' oder 'ln' enthält, ist das akzeptabel.)

d) Es sei nun $\tilde{x}_* := e^2$. Stellen Sie *für die Umkehrfunktion* von f zum Entwicklungspunkt $\tilde{y}_* := f(\tilde{x}_*) = f(e^2)$ das Taylor-Polynom $\tilde{T}_1$ ersten Grades auf.

(4+2+2+3=11 Punkte)

(Summe: 43 Punkte)

**** Viel Erfolg ****