Klausur Mathematik für Ingenieure C2 | **SoSe 2022**
(B.Sc. INF, IP, ILS) | **Montag, 10.10.2022**
Prof. Dr. S. Kräutle | **Dauer: 90 min**

Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.
Für alle Ergebnisse muss der Rechenweg mit angegeben werden.

A1) (Grenzwerte von Folgen, Grenzwerte von Funktionen)

a) Berechnen Sie die Folgengrenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n}}{n}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{5\ln n+n^2+\alpha n}-\sqrt{\ln n+n^2+\beta n}\,, \quad \alpha\neq\beta$

Hinweis: Grenzwerte der Form $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}$ können als bekannt vorausgesetzt und benutzt werden.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$

b) Berechnen Sie die Funktionengrenzwerte:

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{e^2-e^{2\cos x}} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\tan x-\frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x}$$

(8+6=14 Punkte)

A2) (Konvergenzradius von Potenzreihen)

Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihen

$$\text{a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k^2+4k}{5k^2+6k}\right)^{2k}x^k\,, \qquad\qquad \text{b)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} e^{4k+\frac{1}{k}}\,x^{2k}$$

(5 Punkte)

A3) (Differenzieren)

Es sei

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\,\ln(\ln x) & ,\quad x>1\\ 0 & ,\quad x\leq 1\,.\end{cases}$$

a) Berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x>1$.

b) Prüfen Sie, ob $f'(1)$ existiert.

(2+2=4 Punkte)

A4) (Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.
Hinweis: Bei zwei der drei Integrale sollte man mit einer Substitution starten.
Bemerkung: Es ist jeweils eine Rechnung erforderlich; es ist *nicht* gestattet, das Ergebnis ohne Rechnung einer Formelsammlung zu entnehmen.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos(e^{2x})\, e^{2x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \sinh(nx)\, e^{x/2}\, dx\,,\quad n\in\mathbb{N}$

c) $\displaystyle\int \frac{1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}\, dx\,,\quad x>-1$

(3+5+4=12 Punkte)

A5) (Taylor-Entwicklung)

Sei $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x\ln x + \tfrac{1}{12}\,x^4\,.$$

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* := 1$ das Taylor-Polynom T_2 zweiten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_2 aus a) das Lagrange-Restglied $R_2(x)$ an.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_2 an der Stelle $x := 2$.
Die Schranke soll die Form $|R_2(2)|\le c$ haben für ein konkret anzugebendes $c>0$.
Hinweis/Tipp: In $R_2(2)$ für jeden Summanden einzeln eine obere Schranke finden.

d) Begründen Sie, warum es eine Umgebung U von $x_*=1$ gibt, so dass $f:U\to f(U)$ eine Umkehrfunktion hat.

e) Stellen Sie für die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(U)\to U$ zum Entwicklungspunkt $y_*:=f(x_*)=f(1)$ das Taylor-Polynom $\tilde{T}_1 : y\mapsto \tilde{T}_1(y)$ ersten Grades auf.

(4+2+2+1+2=11 Punkte)

(Summe: 46 Punkte)

**** Viel Erfolg ****