FAU Erlangen–Nürnberg
Department Mathematik
Prof. Dr. Carsten Gräser

9. Oktober 2023

Klausur zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure C2

SoSe 2023

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben auf zwei Seiten.

Zugelassene Hilfmittel sind ein doppelseitig handbeschriebenes A4 Blatt, eine Formelsammlung, ein nicht programmierbarer Taschenrechner, der weder Funktionen darstellen, noch Ableitungen berechnen kann. Alle weiteren schriftlichen und elektronischen Hilfsmittel sind **untersagt**.

1. Aufgabe (2+2+2+2+2 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sin(\frac{\pi n}{2})$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gebenenfalls den Grenzwert.

b) Geben Sie eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ an, die nicht konvergiert.

c) Geben Sie eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sowie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass $f(x_n)$ nicht konvergiert.

d) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ auf Konvergenz.

e) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Beweisen Sie mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, dass f streng monoton wachsend ist, wenn $f' > 0$ gilt.

3. Aufgabe (2+2+3+3 Punkte)
Gegeben sei die Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

a) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Untersuchen Sie, ob f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

c) Berechnen Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ das Integral $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

d) Untersuchen Sie, ob $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ für $n \to \infty$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Bitte wenden!

4. Aufgabe (3+2+2+3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

a) Stellen Sie das Taylor-Polynom $T_2[f, 0]$ der Funktion f mit Ordnung 2 im Entwicklungspunkt 0 auf.

b) Geben Sie mit Hilfe des Lagrange-Restglieds eine Fehlerabschätzung der Form

$$|f(x) - T_2[f, 0](x)| \leq C|x|^3 \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

an, indem Sie ein geeignetes C angeben.

c) Begründen Sie, warum die Funktion f im Intervall $(-1, 1)$ streng monoton wachsend und somit invertierbar ist.

d) Stellen Sie das Taylor-Polynom $T_1[f^{-1}, 0]$ der inversen Funktion f^{-1} mit Ordnung 1 im Entwicklungspunkt $0 = f(0)$ auf.

5. Aufgabe (3+3 Punkte)
Bestimmen Sie (jeweils mit Begründung) alle globalen Maximal- und Minimalstellen der folgenden Funktionen:

a) $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-1)^2$,

b) $g : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \|x\|_\infty^2$.

Ende der Klausur