Mathe C2 - Zusammenfassung

10.10.2022 - Sommersemester 2022

1. GRENZWERTE

1.1 HÄUFUNGSPUNKT

Definition (Häufungspunkt). Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$). Ein $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (bzw. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) heißt *Häufungspunkt (HP)* von (a_n), wenn die Folge eine Teilfolge hat, die gegen a konvergiert (bzw. im Fall $a = (\pm)\infty$: bestimmt divergiert). Im Falle der bestimmten Divergenz einer Teilfolge bezeichnet man einen HP $(\pm)\infty$ auch als *uneigentlich*.

1.2 LIMES INFERIOR/SUPERIOR

Limes Inferior $(\liminf)$: Der kleinste Häufungspunkt

Limes Superior $(\limsup)$: Der größte Häufungspunkt

Hat eine Folge nur einen Häufungspunkt gilt: $\liminf = \limsup = \lim$

1.3 RECHENREGELN

$$\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n, \quad \lim_n (a_n b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n, \quad \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}$$

Über Grenzwerte vom Typ $\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ kann man keine allgemeinen Aussagen treffen!

Funktionengrenzwerte

$$\lim_{x \to x_*} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_*} f(x) + \lim_{x \to x_*} g(x), \quad \lim_{x \to x_*} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_*} f(x) \cdot \lim_{x \to x_*} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_*} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \to x_*} f(x), \quad \lim_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_*} f(x)}{\lim_{x \to x_*} g(x)}, \quad \lim_{x \to x_*} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_*} x\right)$$

1.4 REGEL VON L'HOSPITAL

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nur möglich bei Grenzwerten der Form $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$. Allerdings muss vorher die Form $0 \cdot \infty$ in eine der anderen beiden Formen umgewandelt werden!

1.5 WICHTIGE GRENZWERTE

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$	$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = 1 \quad \left(\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{a} = 1\right)$
$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$	$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$	$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x!} = \infty$

2. REIHEN

2.1 GEOMETRISCHE REIHE

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1$; $\lim_n \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-\lim_n q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, für $|q|<1$ (konvergent)

und für alle $|q| \geq 1$ divergent

2.2 HARMONISCHE REIHE

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$; $\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (Beweis durch Cauchy-Kriterium) → Die harmonische Reihe divergiert(!)

2.3 KONVERGENZKRITERIEN

Gegeben ist eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bzw. die Folge a_n:

Divergenzkriterium a_n ist keine Nullfolge → Divergenz (Äquivalent: Reihe ist konvergent → a_n ist Nullfolge)	Einschachtelungskriterium $x_n \leq a_n \leq y_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = z$ → $\lim_{n\to\infty} a_n = z$
Wurzelkriterium $\limsup_n \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$ → Absolute Konvergenz $\limsup_n \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1$ → Divergenz **! Für $= 1$ keine Aussage !**	Quotientenkriterium $\limsup_n \left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert < 1$ → Absolute Konvergenz $\liminf_n \left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert > 1$ → Divergenz **! Für $= 1$ keine Aussage !**
Majorante $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei eine konvergente Reihe $b_k \geq \lvert a_k\rvert$ → Absolute Konvergenz	Minorante $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei eine divergente Reihe $0 \leq b_k \leq a_k$ → Divergenz
Leibniz-Kriterium $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ (eine *alternierende* Reihe) $a_k \geq 0\ \forall k$ & a_k ist monoton fallend & a_k ist Nullfolge → Konvergenz	Cauchy-Kriterium $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine absolut konvergente Reihe → $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ ist ebenfalls absolut konvergent → $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$

2.4 PUNKTWEISE KONVERGENZ

Definition (punktweise Konvergenz einer Folge von Funktionen). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ oder $D \subseteq \mathbb{R}$, und seien $f_n : D \to \mathbb{C}$ (od. $\mathbb{R}$) eine Folge von Funktionen.[34] Wir sagen, die Folge (f_n) konvergiert punktweise auf D gegen eine Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in D$ (also 'punktweise') gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Beispiel: Die Funktionenfolge (f_n) ('Knickfunktionen'), gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ nx & , 0 < x < \frac{1}{n} \\ 1 & , x \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

2.5 GLEICHMÄẞIGE KONVERGENZ

Definition (gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen). Seien D, f_n, f wie oben. Wir sagen, dass die Funktionenfolge *gleichmäßig gegen f konvergiert*, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0. \tag{3.3}$$

3. POTENZREIHEN

Allgemeine Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_*)^k \qquad \text{Häufig ist } x_* = 0 \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

3.2 KONVERGENZRADIUS

Für den Konvergenzradius R gilt:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} & , \text{ falls } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in (0,\infty) \\ \infty & , \text{ falls } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0 & , \text{ falls } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \end{cases}$$

Das können wir kurz (und nicht ganz mathematisch präzise) zuammenfassen zu:

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Bei „abgewandelten Potenzreihen“ mittels Substition (z. B. x^{-k}, $y = x^{-1}$) den Konvergenzradius bestimmen und anschließend Resubstitutieren ($|y| < R$ → $\left|x^{-1}\right| < R$).

3.3 KONVERGENZBEREICH

Potenzreihen mit Konvergenzradius $R \in (0,\infty]$ sind auf dem Konvergenzbereich $I := (x_* - R, x_* + R)$ stetig.

3.4 EXP, SIN, COS

$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$

Rechenregeln

$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ $a^b = \exp(b \ln a),\ a > 0$	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
$e^{ix} = \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$	

3.5 LOGARITHMUSREGELN

$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$	$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$	$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

3.6 POTENZGESETZE

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$x^a : x^b = x^{a-b}$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

4. STETIGKEIT

Stetigkeit an der Stelle x_*:

$\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$

Eigentl. trivial: Der y-Wert $(f(x))$ nähert sich für $x \to x_*$ immer weiter dem echten Wert von x_* an $(f(x_*))$ („Funktion macht keine Sprünge“).

Allgemein Stetigkeit:

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_*)$, Gewissermaßen: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$

Jedes Polynom und jede gebrochen-rationale Funktion sind stetig! Außerdem sind $\exp, \sin, \cos$ stetig.

4.2 NULLSTELLENSATZ VON BOLZANO

Satz (Nullstellensatz von Bolzano). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig; $a < b$, und es sei $f(a) \cdot f(b) < 0$ (damit drückt man in knapper Form aus, dass einer der beiden Werte positiv und der andere negativ ist). Dann besitzt f in (a,b) (mindestens) eine Nullstelle, d.h. ein x_* mit $f(x_*) = 0$.

4.3 ZWISCHENWERTSATZ VON BOLZANO

Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann wird jeder Wert ('Zwischenwert') ξ, der zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, als Funktionswert (mindestens) einmal angenommen, d.h. es gibt ein $x_* \in (a,b)$ mit $f(x_*) = \xi$.

5. DIFFERENZIERBARKEIT

5.1 ZUSAMMENHANG DIFFERENZIERBARKEIT UND STETIGKEIT

Satz (Beziehung zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit).
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_* \in D$. Dann ist f stetig an der Stelle x_*.
Kurz: Jede diffbare Funktion ist stetig.
Die Diff'barkeit ist in diesem Sinne eine 'stärkere' Eigenschaft als die Stetigkeit.

5.2 DIFFERENTIALQUOTIENT

$\lim\limits_{x_* \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x_*)}{x_0 - x_*}$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

5.3 WICHTIGE ABLEITUNGEN

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{R} \; \{0\}$	
$\exp'(x) = exp(x)$, $(e^x)' = e^x$	$\ln' x = \frac{1}{x}$
$(x^a)' = x^a \cdot \frac{a}{x}$	
$\sin'(x) = \cos(x)$	$\cos'(x) = -\sin(x)$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$	$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

5.4 ABLEITUNGSREGELN

Produktregel

$$(u(x) \cdot (v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$$

Kettenregel

$$(u((v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

5.5 DIFFERENZIEREN DER UMKEHRFUNKTION

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

5.6 ZEIGEN VON GENAU EINER NULLSTELLE

Zwei Werte in $f(x)$ einsetzen, wenn einer größer Null und der andere kleiner Null ist und die Funktion stetig ist, existiert eine Nullstelle gemäß Nullstellensatz von Bolzano. Anschließend die Monotonie im Intervall mit der Ableitung zeigen und die Ränder auf Extrema prüfen.

5.7 TAYLOR-POLYNOM

n-tes Taylor-Polynom von f für den Entwicklungspunkt x_* :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_*)}{k!} \cdot (x - x_*)^k \quad , \quad f^k(x) \text{ meint die } k\text{-te Ableitung von } f(x)\text{, also bspw. } f'''''''(x).$$

Restglied

Der Unterschied zwischen dem tatsächlichen und dem approximierten Wert (mittels h-Methode):

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_*)^{n+1}\,, \quad \text{wobei } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_* \text{ liegt.}$$

Gesamt

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} \cdot (x - x_*)^k \right) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_*)^{n+1}$$

5.8 TALYOR-REIHE

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} \cdot (x - x_*)^k$$

Konvergenzverhalten der Taylor-Reihe

Verhalten der Taylor-Reihe und des Restgliedes

Für vorgegebenes x_*, x sind also, bei einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f, folgende drei Fälle möglich:

1. Die Taylor-Reihe $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ an der Stelle x konvergiert gegen $f(x)$.
   Gleichbedeutend: $R_n(x) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$
2. Die Taylor-Reihe an der Stelle x konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$.
   Gleichbedeutend: Das Restglied konvergiert für $n \to \infty$, jedoch nicht gegen null.
3. Die Taylor-Reihe an der Stelle x divergiert.
   Gleichbedeutend: Das Restglied divergiert.

Aus der Sicht desjenigen, der eine Approximation an f sucht, ist der Fall 1 also der wünschenswerte Fall.
Um zu prüfen, ob die Taylor-Reihe an einer Stelle x gegen f konvergiert, untersucht man also das Restglied.

Taylor-Reihe einer Potenzreihe

Die Taylor-Reihe einer (konvergenten) Potenzreihe ist auf dem Konvergenzbereich $(x_* - R, x_* + R)$ die Potenzreihe selbst.

6. INTEGRALE

Jede auf $[a, b]$ monotone oder stetige Funktion ist Riemann-integrierbar:

$$\int f(x)\ dx = F(x)\ \underline{+c} \qquad \Bigg| \qquad \int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

6.1 PARTIELLE INTEGRATION

$$\int f(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x)\ dx + c \ \Bigg|\ \int_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx = [f(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot G(x)\ dx$$

6.2 SUBSTITUTION

$$\int f(g(x))\ dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{g'(x)}\ du + c \qquad \Bigg| \qquad \int_a^b f(g(x))\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \cdot \frac{1}{g'(x)}\ du$$

Am Ende: Rücksubstitution mit $u = g(x)$.

6.3 SUBSTITUTIONSREGEL

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int f(u)\ du + c \qquad \Bigg| \qquad \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

Am Ende: Rücksubstitution mit $u = g(x)$.

6.4 VEREINFACHUNGEN

$$\int f(x) \pm g(x)\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx \qquad\qquad \int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx$$

6.5 PARTIALBRUCHZERLEGUNG

1. Polynomdivision (Zählergrad < Nennergrad)
2. Alle (auch komplexen) Nullstellen des Nenners bestimmen (mit Vielfachheit)
3. Bruch als Partialbruchzerlegung darstellen:
   - Jede Nullstelle $(x - x_i)$ als einzelnen Bruch in der Form $\dfrac{a_i}{x - x_i}$ schreiben
   - Bei mehrwertigen Nullstellen $(x - x_i)^n$ in der Form $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(x - x_i)^k}$
   - Bei imaginären Nullstellen $(x^2 - x_i)$ in der Form $\dfrac{a_i x + a_{i+1}}{x^2 - x_i}$
   - Bsp.: $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{(x-3)(x+4)^2(x^2+6)} \ \rightarrow\ \dfrac{a_1}{x-3} + \dfrac{a_2}{(x+4)} + \dfrac{a_3}{(x+4)^2} + \dfrac{a_4 x + a_5}{x^2+6}$
4. Berechnung der Koeffizienten (a_i) durch Ausrechnen der Gleichung: $f(x) = \text{Partialbruchzerlegung}$
   - Mit Hauptnenner multiplizieren → Ausmultiplizieren → Koeffzientenvergleich (s. nächste Seite)
5. Integrieren der Partialbrüche
   - Achtung die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist $\ln|x|$ (auf die Betragsstriche achten!)

Koeffzientenvergleich

- 3. Schritt: Die Partialbruchzerlegung lautet also (mit Satz der Vorlesung):

$$\frac{x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

  Bemerkung: Das Integral dürfen wir berechnen, da die einzige reelle Nullstelle $x=1$ nicht im Integrationsintervall $[2,3]$ liegt.

- 4. Schritt: Berechnen der Koeffizienten a, b, c in obigem Ansatz:

  Die Straight-Forward-Methode: Mit Hauptnenner durchmultiplizieren, dann ausmultiplizieren, dann Koeffizientenvergleich:
  Mit HN durchmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned} x^2-x+2 &= a\,(x^2+1) + (bx+c)\,(x-1) \\ &= a\,(x^2+1) + bx^2 - bx + cx - c \\ &= (a+b)\,x^2 + (-b+c)\,x + (a-c) \end{aligned}$$

  Der Koeffizientenvergleich ergibt das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  Wir lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

  also $c=-1$, $b=1+c=0$, $a=1-b=1$

Zweite Variante

Variante (häufig schneller):
Die Ansatzgleichung mit $(x-1)$ durchmultiplizieren, dann $x := 1$ einsetzen:
$\Rightarrow \frac{x^2-x+2}{x^2+1} = a + (bx+c)\,\frac{x-1}{x^2+1} \overset{x:=1}{\Longrightarrow} a = \frac{1-1+2}{1+1} = 1$
Wenn man nun die Ansatzgleichung mit (x^2+1) durchmultiplizieren würde, dann müsste man wohl sinnvollerweise $x := i$ anschließend einsetzen, was Rechnen mit komplexen Zahl erforderlich macht, was unangenehm ist.
Stattdessen ist es wohl besser, das Wissen $a=1$ in den Ansatz einzusetzen, und dann $x := 0$ (damit b 'rausfliegt'). Man bekommt: $\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{bx+c}{(x-1)^2} \overset{x:=0}{\Longrightarrow} c = -1$

Den c-Wert ebenfalls eingesetzt:
$\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{bx-1}{x^2+1}$, und nun einen noch unbenutzten x-Wert einsetzen, z.B. $x := -1$ liefert
$\frac{4}{-2\cdot 2} = \frac{1}{-2} + \frac{-b-1}{2} \quad | +1$
$\Rightarrow \quad b = 0.$

Wir haben somit den Integranden dargestellt als

$$\frac{x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x^2+1}$$

6.6 Zirkuläres Integral

Ein Integral, das beim partiellen Integrieren ein Vielfaches von sich selbst erzeugt.

Zum Lösen die partielle Integration als Gleichung auffassen und nach dem Integral auflösen:

$$\int f(x)\,dx = \cdots = a + b + c\int f(x)\,dx \quad \to \quad \int f(x)\,dx = \frac{a+b}{1-c}$$

7. Analysis im R^N

7.1 Partielle Ableitung

Die Ableitung einer Funktion nach einer bestimmten Variable.

Bsp.: $f(x,y) = x^3y + y^2$; $\partial_x f'(x,y) = 3x^2y$; $\partial_y f'(x,y) = x^3 + 2y$

7.2 Gradient

Ein Vektor bestehend aus allen partiellen Ableitungen. Der Gradient zeigt immer in die Richtung des steilsten Anstiegs (entsprechend die Negation in die Richtung des steilsten Abfalls). Optional könnte man den Gradienten auch wieder als neue $\mathbb{R}^n$-Funktion auffassen.

Für $f(x,y) := x^3y + \exp(x^2+y)$ sind die partiellen Ableitungen

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2x\exp(x^2+y), \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + \exp(x^2+y),$$

der Gradient ist also

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + 2x\exp(x^2+y) \\ x^3 + \exp(x^2+y) \end{pmatrix}.$$

7.3 Richtungsableitung

Satz (Formel zur Berechnung der Richtungsableitung)

Sei $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)^\top$. Falls in einer Umgebung von $\vec{x}_*$ alle partiellen Ableitungen von f existieren und stetig(!) sind, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{x}_*) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_*) \cdot r_k = \langle \nabla f(\vec{x}_*), \vec{r} \rangle.$$

7.4 Totale Ableitung

Satz (hinreichendes Kriterium für die Existenz der totalen Ableitung)

Falls alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung(!) von $\vec{x}$ existieren und dort stetig(!) sind, dann ist f an der Stelle $\vec{x}$ total differenzierbar.
(Und nach dem vorangegangenen Satz ist dann die totale Ableitung gleich der Jacobi-Matrix, d.h. für $m=1$ gleich dem Transponierten des Gradienten.)

Wenn man die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von $\vec{x}$ berechnen kann und diese stetig sind, dann ist f in x total diff'bar mit $f'(\vec{x}) = Jf(\vec{x})$; das Verhalten des Restes muss nicht weiter geprüft werden.

7.5 JACOBI-MATRIX

Def. (Jacobi-, Funktionalmatrix).[60] Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $x \in D$. Die Matrix

$$Jf(\vec{x}) = (\partial_j f_i)_{i=1..m, j=1..n} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\vec{x}) & \dots & \partial_n f_1(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(\vec{x}) & \dots & \partial_n f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

heißt (bei Existenz) die *Jacobi-* oder *Funktionalmatrix* von f an der Stelle x.[61] Die Zeilen von $Jf(x)$ sind gerade die Gradienten der Komponentenfunktionen f_i, diese jedoch als Zeilenvektoren geschrieben:

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1(x))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_m(x))^T \end{pmatrix}$$

Insbesondere im Fall $m = 1$ ist die Jacobi-Matrix ein Zeilenvektor, und zwar das Transponierte des Gradienten.

Kettenregel

Satz (Kettenregel)

Seien $g : D_g \to D_f$, $f : D_f \to \mathbb{R}^l$; $D_g \subseteq \mathbb{R}^n$ und $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Seien f und g total differenzierbar. Dann gilt die Matrix-Gleichung

$$(f \circ g)'(\vec{x}) = f'(g(\vec{x}))\, g'(\vec{x})$$

oder gleichbedeutend

$$\underbrace{J(f \circ g)(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{l \times n}} = \underbrace{Jf(g(\vec{x}))}_{\in \mathbb{R}^{l \times m}}\, \underbrace{Jg(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}.$$

7.6 HESSE-MATRIX

(„Die zweite partielle Ableitung“):

Def. (Hesse-Matrix)

Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen einer skalarwertigen(!) Funktion f an einer Stelle $\vec{x}$ nennt man (bei Existenz) *Hesse-Matrix* von f an der Stelle $\vec{x}$:

$$Hf(\vec{x}) := \left(\partial_i \partial_j f\right)_{i=1..n, j=1..n} = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(\vec{x}) & \dots & \partial_1 \partial_n f(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(\vec{x}) & \dots & \partial_n \partial_n(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Satz von Schwarz

Die Reihenfolge von mehreren partiellen Ableitungen hintereinander ist beliebig $(\partial_i \partial_j f(\vec{x}) = \partial_j \partial_i f(\vec{x}))$.

→ Die Hesse-Matrix ist symmetrisch!