FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting

Zum Bestehen der Klausur sind 40% der Punkte hinreichend. Alle Aufgaben erfordern eine Rechnung oder Begründung!
Bearbeitungszeit: 90 Minuten; erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien und ein (beidseitig) von Hand beschriebenes DIN-A4 Blatt; die angegebenen Integrale und Funktionen auf der Rückseite.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Begründen Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\cosh(n-1)$ existiert und ist endlich.

b) Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} = 1$.

c) Es gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{\exp(x)-\cos(x)} = 2$.

d) Es gibt *keine* Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ bezeichne die imaginäre Einheit).

e) Es gibt *keine* Folgen in $\mathbb{R}$ ohne Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (6+3 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe für $m \in \{0, 1, 2\}$ auf (absolute) Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^m}$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{5}\right)^n.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon-\delta$-Charakterisierung der Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4 (4+3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := x^2 \sin(x) - 2\sin(x) + 2x\cos(x)$$

a) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ das Taylor-Polynom dritten Grades T_3^f.

b) Stellen Sie für das Taylor-Polynom aus a) das Restglied R_3 auf. Berechnen Sie für das Restglied an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ eine Schranke $|R_3| \leq c$ und geben Sie c explizit an.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := |x^2 - 1|$$

auf lokale und globale Extremwerte.

Aufgabe 6 (5 + 7 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{x - \cos(x)\sin(x)}{x^2 + \cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int \exp(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

Dabei dürfen Sie nur die unten angegebenen Stammfunktionen als bekannt voraussetzen!

Als bekannt vorausgesetzte Integrale und Funktionen:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c,$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c, \qquad \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c,$$

$$\int \exp(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\exp(ax) + c, \quad 0 \neq a \in \mathbb{R}, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c, \quad |x| < 1, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c, \quad |x| > 1,$$

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$