Mathematik für Ingenieure C2 (INF, IP, BPT-M)

Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting

Zum Bestehen der Klausur sind 50% der Punkte hinreichend. Alle Aufgaben erfordern eine Rechnung oder Begründung!
Bearbeitungszeit: 90 Minuten; erlaubte Hilfsmittel: Schreibutensilien und ein (beidseitig) von Hand beschriebenes DIN-A4 Blatt; die angegebenen Integrale und Funktionen auf der Rückseite.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Begründen Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Der Grenzwert $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x}$ existiert und ist endlich.

b) Es gilt: $\left(\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\ln(x^3)}\right) \in (-1,0)$.

c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(n+a)(n+b)} - n = a + b$

d) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

e) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ stetig auf $[a,b]$, dann ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Aufgabe 2 (6+3 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\cosh(k) - \sinh(k)).$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^{(2^n)}.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$ auf $D = (-\infty, 0)$ auf gleichmäßige Stetigkeit.

Hinweis: Die (punktweise) Stetigkeit von f darf als bekannt angenommen werden.

Aufgabe 4 (4+3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \sqrt{1+x}.$$

a) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ das Taylor-Polynom dritter Ordnung T_3^f.

b) Stellen Sie für das Taylor-Polynom aus a) das Restglied R_3 auf. Berechnen Sie für das Restglied an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ eine Schranke $|R_3| \leq c$ und geben Sie c explizit an.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $f : [-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \frac{|x-2|}{(x+1)^2}$$

auf lokale und globale Extremwerte.

Aufgabe 6 (4 + 8 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

oder begründen Sie die Nichtexistenz. Dabei dürfen Sie nur die unten angegebenen Stammfunktionen als bekannt voraussetzen!

Als bekannt vorausgesetzte Integrale und Funktionen:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c,$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c, \qquad \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c,$$

$$\int \exp(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\exp(ax) + c, \quad 0 \neq a \in \mathbb{R}, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c, \quad |x| < 1, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsin}(x) + c, \quad |x| > 1,$$

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$