Klausur zu Mathematik für Ingenieure C2 im Sommersemester 2021

Aufgabe 1:

a) Zeigen oder widerlegen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=17}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k-4}}$

b) Zeigen oder widerlegen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^3}$

c) Zeigen oder widerlegen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 + e^{-k})$

d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k} x^k$

Aufgabe 2: Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion stetig bei $x = 0$ ist.

b) Bestimmen Sie $f'(0)$ mit der h-Methode.

c) Bestimmen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.

d) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^x \cdot \frac{2x + 3}{x + 1}.$$

a) Bestimmen Sie $\lim_{x \to -1} f(x)$ und $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Finden Sie alle lokalen Minima und Maxima von f.

c) Untersuchen Sie f auf globale Minima und Maxima.

Aufgabe 4: Integrale:

a) Bestimmen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert: $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$.

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

c) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

Bemerkung: Es ist immer eine Rechnung erforderlich, es ist nicht ausreichend, das Ergebnis z.B. einer Formelsammlung zu entnehmen. Tipp: Partialbruchzerlegung, partielle Integration, Substitution (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge).

Aufgabe 5: In dieser Aufgabe betrachten wir die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f: \quad & D_f \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto \exp\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right) \end{aligned}$$

wobei $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

a) Skizzieren Sie den Definitionsbereich.

b) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig fortsetzbar ist und geben Sie die Fortsetzung an.

c) Geben Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hessematrix $Hf(x, y)$ für Punkte $(x, y) \in D_f$ an.

d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom von Grad 2 von f zum Entwicklungspunkt $(1, 1)$.