# Differentialgleichungen (DGL)

MatheC3 - WS 2022/23



# 1 DGL erster Ordnung

## 1.1 Homogene DGL

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t)$$

$$y_{hom}(t) = \exp\left(\int a(t)\ dt\right)$$

$$L_{hom} = \{a \cdot y_{hom}(t) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

### Trennung der Variablen

**Allgemeine Form:**

$$y'(t) = g(y(t)) \cdot h(t)$$

**Vorgehen:**

| Ohne Anfangswert | Mit Anfangswert |
|---|---|

1. $y(t)$ auf eine Seite, $t$ auf die andere Seite bringen:

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t)$$

2. Beide Seiten integrieren und beim Anfangswert $\tau = t$ substituieren:

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))}\ dt = \int h(t)\ dt \qquad \Bigg| \qquad \int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))}\ d\tau = \int_{t_0}^{t} h(\tau)\ d\tau$$

3. Substitution mit $\eta := y(t)$ (wegen Substitutionsregel $\int g(y(t)) \cdot y'(t)\ dt = \int g(\eta)\ d\eta$):

$$\int \frac{1}{g(\eta)}\ d\eta = \int h(\tau)\ d\tau \qquad \Bigg| \qquad \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)}\ d\eta = \int_{t_0}^{t} h(\tau)\ d\tau$$

4. Ausrechnen, rückeinsetzen und nach $y(t)$ auflösen ($+\,C$ bei unbestimmten Integral nicht vergessen). Hilfreich dabei: Quadratische Ergänzung

## 1.2 Inhomogene DGL (partikuläre Lösung)

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$$

$$L_{inhom} = \{y_{par}\} + L_{hom}$$

### Variation der Konstanten

1. $$c(t) = \int \frac{b(t)}{y_{hom}(t)}\ dt \qquad \Bigg| \qquad c(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{y_{hom}(\tau)}\ d\tau$$

2. $$y_{par}(t) = c(t) \cdot y_{hom}(t)$$

3. $$y_{ges}(t) = y_{par}(t) + a \cdot y_{hom}(t)\ , \quad a \in \mathbb{R}$$

## 1.3 Substitution

Falls die gegebene DGL keine der beiden oberen Formen hat, kann man den von $y(t)$ abhängigen Teilterm durch $u(t)$ substitutieren und eine neue DGL für $u(t)$ aufstellen.
Durch Rücksubstitution erhält man die schlussendliche $y(t)$-Funktion.

### 1.3.1 $y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \quad \Rightarrow \quad u(t) := \frac{y(t)}{t}$

$$u'(t) = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t} \quad \rightarrow \quad \text{DGL} \quad \Rightarrow \quad y(t) = u(t) \cdot t$$

### 1.3.2 $y'(t) = f(a\,t + b\,y(t) + c) \quad \Rightarrow \quad u(t) := a\,t + b\,y(t) + c$

$$u'(t) = a + b \cdot f(u(t)) \quad \rightarrow \quad \text{DGL} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{u(t) - a\,t - c}{b}$$

### 1.3.3 $y'(t) = f(t) \cdot y(t) + g(t) \cdot y^{(\alpha)}(t)\ , \ \ \alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad u(t) := y(t)^{1-\alpha}$

$$u'(t) = (1-\alpha) f(t) \cdot u(t) + (1-\alpha) g(t) \quad \rightarrow \quad \text{(inhomogene) DGL}$$

Das ganze ist eine sog. Bernoulli'sche Gleichung

### 1.3.4 $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot t^k \cdot y^{(k)}(t) = 0$

1. $u(\ln t) = y(t)$

   Diese Gleichung wird nun solange abgeleitet, bis man die Terme $t^k \cdot y^{(k)}(t)$ durch passende „$u(t)$-Terme“ ersetzen kann

2. $\tau := \ln t \quad \rightarrow \quad u^{(k)}(\tau)$

3. $\sum_{k=0}^{n} \tilde{\alpha}_k \cdot u^{(k)}(t) = 0$

Das ganze ist eine sog. Euler'sche DGL

# 2 DGL-Systeme erster Ordnung

## 2.1 Fundamentalsystem (homogene Lösung)

$$\vec{y'}(t) = A \cdot \vec{y}(t)$$
$$y_{ges} = a_1 \cdot \vec{y_1}(t) + \cdots + a_n \cdot \vec{y_n}(t) \mid a_i \in \mathbb{R}$$
$$L_{hom} = \{a_1 \cdot \vec{y_1}(t), \ldots, a_n \cdot \vec{y_n}(t) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$
$$FS = \{\vec{y_1}(t), \ldots, \vec{y_n}(t)\}$$

Fundamentalsystem: Eine Basis des Lösungsraumes $L_{hom}$ (quasi $L_{hom}$ ohne $a_i$)
Fundamentallösungen: Die einzelnen Vektoren des Fundamentalsystems

### 2.1.1 Matrix $A$ ist eine Diagonalmatrix oder diagonalisierbar

Falls $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ oder diagonalisierbar ist (für jeden Eigenwert algebraische = geometrische Vielfachheit), ist das Fundamentalsystem:

$$\vec{y_1}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} \quad , \ \ldots \ , \quad \vec{y_n}(t) = e^{\lambda_n t}\vec{v_n}$$

$\lambda_i$ = Eigenwerte: $\det(A - \lambda E) = 0$
$\vec{v_i}$ = Eigenvektoren: $(A - \lambda E) \cdot \vec{v_i} = \vec{0}$ (bei Diagonalmatrix die Einheitsvektoren)

**Umwandlung von einem komplexen in ein reelles Fundamentalsystem**
Zu einer komplexen Fundamentallösung $\left(y(t))e^{\lambda t} \cdot \vec{q} = e^{(a+bi)t} \cdot (\vec{r} + \vec{s}i)\right)$ gehören immer zwei konjugiert-komplexe reelle Lösungen:

$$\vec{y_1}(t) = \operatorname{Re}(\vec{y}(t)) = (\vec{r} \cdot \cos(b\,t) - \vec{s} \cdot \sin(b\,t)) \cdot e^{at}$$
$$\vec{y_2}(t) = \operatorname{Re}(\vec{y}(t)) = (\vec{s} \cdot \cos(b\,t) + \vec{r} \cdot \sin(b\,t)) \cdot e^{at}$$

### 2.1.2 Matrix $A$ ist nicht diagonalisierbar

**Hauptvektor**
Zu jedem Eigenwert $\lambda$ findet man immer genau so viele linear unabhängige Hauptvektoren, wie die algebraische Vielfachheit von $\lambda$ angibt. D. h. zu jeder Matrix gibt es immer entsprechend viele Hauptvektoren die eine Basis (Fundamentalsystem) bilden.
Eigenvektoren sind Hauptvektoren der Stufe 1, aus diesen lassen sich die weiteren Hauptvektoren berechnen.

**Hauptvektoren der Stufe $k$ ($k \geq 2$)**
Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Hauptvektor der Stufe $k$, wenn es einen anderen Hauptvektor $\vec{w}$ der Stufe $k - 1$ gibt, so dass:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{v_k} = \vec{w_{k-1}}$$

**Fundamentalsystem berechen**
Pro Eigenwert $\lambda$ wird, mit dem zugehörigen Eigenvektor, eine Kette an Hauptvektoren $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}$ berechnet. Diese ist so lang ist, dass sie eine Basis von $A$ bildet (die Länge entspricht der algebraischen Vielfachheit).

$$\vec{y_m}(t) = e^{\lambda t}\left(\vec{v}_m + t \cdot \vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!} \cdot \vec{v}_{m-2} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \vec{v_1}\right)$$

Achtung: Der Eigenvektor ($\vec{v_1}$) steht ganz hinten.
Dies ergibt pro Vektor nur jeweils eine $\vec{y_i}$-Funktion. Das Fundamentalsystem ist entsprechend $\{\vec{y_1}(t), \ldots, \vec{y_n}(t)\}$.
Jeder Eigenwert $\lambda$ trägt dazu genau so viele Fundamentallösungen bei, wie seine algebraische Vielfachheit ist.

### 2.2 Inhomogenes DGL-System (partikuläre Lösung)

$$\vec{y}'(t) = A \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

$$L_{inhom} = \{\vec{y_{par}}\} + L_{hom}$$

**Variation der Konstanten**

$$\vec{c}(t) = \int W(t)^{-1} \cdot \vec{b}(t)$$

$$\vec{y_{par}}(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \cdot \vec{y_i}(t) = W(t) \cdot \vec{c}(t)$$

Fundamentalmatrix: $W(t) := [\vec{y_1}(t), \ldots, \vec{y_n}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Matrix aus den Fundamentallösungen)
Wronski-Determinante: $det(W(t))$ (Wenn $det(W(t)) \neq 0$ wurde ein Fundamentalsystem gefunden)

# 3 DGL $n$-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t) \cdot y(t) = b(t)$$

### 3.1 Umwandlung in ein DGL-Sytem erster Ordnung

$$\vec{y}_{neu}(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y}'_{neu}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} \overset{\text{(Dgl.)}}{=} \begin{pmatrix} y_{neu,2}(t) \\ y_{neu,3}(t) \\ \vdots \\ y_{neu,n}(t) \\ b(t) - [a_{n-1} y_{neu,n}(t) + \ldots + a_0 y_{neu,1}(t)] \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{y}_{neu}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}(t)}$$

**Charakteristisches Polynom („Aus Ableitungen werden Potenzen“)**

$$p(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$$

### 3.2 Homogene Lösung

Für jeden Eigenwert $\lambda$:

$$y_{\lambda 1}(t) = e^{\lambda t}\ ,\ y_{\lambda 2}(t) = t \cdot e^{\lambda t}\ ,\ \ldots\ ,\ y_{\lambda n}(t) = t^{r-1} \cdot e^{\lambda t} \quad , \quad r = \text{Vielfachheit der Nullstelle } \lambda$$

**Umwandlung von einem komplexen in ein reelles Fundamentalsystem**

$$y_1 = \text{Re}(y(t)) = e^{at} \cdot \cos(b\,t)$$

$$y_2 = \text{Im}(y(t)) = e^{at} \cdot \sin(b\,t)$$

## 3.3 Partikuläre Lösung

### 3.3.1 Analog zu Variation der Konstanten bei DGL-Systemen (Abschnitt 2.2)

Seien $y_1, ..., y_n$ $n$ linear unabhängige Lösungen der *homogenen* skalaren Dgl. (die wir gemäß dem vorangegangenen Satz berechnet haben).
Das LGS (*) lautet dann

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Löse dieses LGS, und bilde für jede Komponente $c_i'(t)$ des Lösungsvektors eine Stammfunktion $c_i(t)$.

$$\vec{y_{par}}(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \cdot \vec{y_i}(t)$$

### 3.3.2 „Ansatz vom Typ der rechten Seite“

Das Vorgehen ist, dass auf der linken Seite die $y^{(n)}(t)$-Terme durch einen entsprechenden $y_{par}^{(n)}(t)$-Term ersetzt werden. Der $y_{par}(t)$-Term aus der unteren Tabelle muss also noch entsprechend $n$ mal abgeleitet werden.

$$y_{par}(t) :=$$

| $b(t) =$ Polynom | | $b(t) = b \cdot e^{kt}$ | | $b(t) = e^{kt} \cdot$ (Polynom) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(0) \neq 0$ | 0 ist $r$-fache Nst von $p$ | $p(k) \neq 0$ | $k$ ist $r$-fache Nst von $p$ | $p(k) \neq 0$ | $k$ ist $r$-fache Nst von $p$ |
| Polynom selben Grades mit $a_i$ als Koeffizienten | mit $t^r$ noch als Vorfaktor | $a \cdot e^{kt}$ | $a \cdot e^{kt} \cdot t^r$ | $e^{kt}$ · Polynom selben Grades mit $a_i$ als Koeffizienten | Stattdessen $e^{kr} \cdot t^r$ am Anfang |
| $\sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i$ | $t^r \cdot \sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i$ | $a \cdot e^{kt}$ | $a \cdot e^{kt} \cdot t^r$ | $e^{kt} \cdot \sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i$ | $e^{kt} \cdot t^r \cdot \sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i$ |

Zeilen tauchen

Falls die rechte Seite nicht die o.g. Form hat, aber eine Summe aus Termen der obigen Form ist:
Bestimme mit obiger Maschinerie für jeden der Summanden separat eine partikuläre Lösung und addiere dann diese partikulären Lösungen.

# 4 Numerische Verfahren

Wenn die Lösung von Anfangswertproblemen nicht exakt berechnen werden kann.
Sei folgendes Anfangswertproblem gegeben:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \quad y(t_0) = y_0$$

Mit einer Schrittweite $h > 0$

## 4.1 Euler'sches Polygonzugverfahren, Explizites Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

## 4.2 Verbessertes Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, \ \frac{h}{2} \cdot f(t_n, y_n)\right)$$