Klausur Mathematik für Ingenieure C3, Bachelor **WiSe 2022/’23**

Donnerstag, 06.04.2023

Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.
Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung; es sei denn, die Aufgabenstellung besagt ausdrücklich, dass das nicht erforderlich ist.

A1) (Extremwertaufgabe)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = a\,x^3\,y^2 + 2\,x - \tfrac{1}{a}\,x^2\,,$$

die von einem Parameter $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ abhängt.

a) Bestimmen Sie die kritische Stelle (= den stationären Punkt) der Funktion f.
Bemerkung: Es gibt genau eine kritische Stelle.

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $Hf(x,y)$ der Funktion f.

c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ob f ein lokales Maximum oder Minimum hat.

(3+1+2 = 6 Punkte)

A2) (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = \frac{3}{4}\,x^4 + 3\,x^2 y + 2\,y^3$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 4\,.$$

(7 Punkte)

A3) (Fixpunktiteration)

Wir betrachten die Funktion

$$\Phi(x) := \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{1+x^2}\right)\,, \quad \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

a) Welche Zahl oder Zahlen $x\in\mathbb{R}$ ist/sind Fixpunkt(e) von Φ?

b) Führen Sie zwei Iterationsschritte der Fixpunktiteration durch, zum Startwert $x_0 := 1$.

c) Berechnen Sie eine Kontraktionskonstante für $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Hinweise: Die Abschätzung $2|ab| \leq a^2+b^2$ aus dem 1. Semester, also $2|ab]/(a^2+b^2) \leq 1$, könnte nützlich sein. Und: Es ist möglich, aber *nicht* zwingend gefordert, die *kleinstmögliche* Kontraktionskonstante zu finden.

d) Ist die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergent? (kurze Begründung)

e) Prüfen Sie, ob die Fixpunktiteration quadratisch konvergent ist.

(3+2+2+1+1=9 Punkte)

A4) (Differentialgleichungen)

a) (i) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 16\, y = 0\,.$$

(ii) Geben Sie eine Anfangsbedingung für die obige Differentialgleichung an, die folgende Anforderungen erfüllt:
Die Lösung $t \mapsto y(t)$ des Anfangswertproblems soll eindeutig bestimmt sein, soll nicht die Nullfunktion sein, und soll $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ erfüllen. (Angabe der Anfangsbedingung reicht, ohne Begründung.)

b) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = A\,\vec{y} \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = A\,\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Zur Zeitersparnis dürfen Sie verwenden (müssen Sie nicht zeigen):
Die Funktionen $\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden ein Fundamentalsystem.

(3+3+3=9 Punkte)

**** bitte wenden ****

A5) (Algebra)

a) <u>Vorbemerkungen zu a):</u>
– Wer mag, kann die Kurzschreibweise „k“ anstelle von „$[k]_n$“ verwenden.
– Bei (i) und (ii) ist es erlaubt, das Ergebnis ohne Rechnung/Begründung anzugeben.

Wir betrachten $\mathbb{Z}_{20}^*$:

(i) Geben Sie alle Elemente der Gruppe $\mathbb{Z}_{20}^*$ an.

(ii) Geben Sie die von $[7]_{20}$ sowie die von $[9]_{20}$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}_{20}^*$ an.

(iii) Hat $\mathbb{Z}_{20}^*$ eine Untergruppe, die zu $(\mathbb{Z}_3, +)$ isomorph ist? (Begründung)

(iv) Hat $\mathbb{Z}_{20}^*$ eine Untergruppe, die zu $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorph ist? (Begründung)

b) Wie viele Elemente hat die Gruppe $\mathbb{Z}_{500}^*$?

c) Berechnen Sie das Inverse von $[112]_{585}$

(i) in $(\mathbb{Z}_{585}, +)$,

(ii) in $(\mathbb{Z}_{585}, \cdot)$.

d) Welchen Rest hat $k := 5^{21} + 2^{21}$ bei Division durch 126 ?
<u>Hinweis</u>: 21 kann man als Produkt schreiben.

(5+1+3+2 = 11 Punkte)

(Summe: 42 Punkte)

**** Viel Erfolg ! ****