**Klausur Mathematik für Ingenieure C3, Bachelor** **WiSe 2022/'23**

**Donnerstag, 06.04.2023**

**Prof. Dr. S. Kräutle** **Dauer: 90 min**

---

***Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.***
***Jede Teilaufgabe erfordert eine Rechnung oder Begründung; es sei denn, die Aufgabenstellung besagt ausdrücklich, dass das nicht erforderlich ist.***

---

## A1) (Extremwertaufgabe)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = a\,x^3\,y^2 + 2\,x - \tfrac{1}{a}\,x^2\,,$$

die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ abhängt.

a) Bestimmen Sie die kritische Stelle (= den stationären Punkt) der Funktion $f$.
Bemerkung: Es gibt genau eine kritische Stelle.

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $Hf(x,y)$ der Funktion $f$.

c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ob $f$ ein lokales Maximum oder Minimum hat.

(3+1+2 = 6 Punkte)

**Lösung:**

a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3ax^2y^2 + 2 - \frac{2}{a}x \\ 2ax^3y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der unteren dieser beiden Gleichungen folgen die beiden Fälle:
<u>Fall 1</u>: $x = 0$. Dies führt sofort zum Widerspruch $2=0$ mit der oberen Gleichung.
<u>Fall 2</u>: $y = 0$
Dies in die obere Gleichung eingesetzt ergibt $2 = \frac{2}{a}\,x$.
$\rightsquigarrow\ x = a$
Ergebnis: Die kritische Stelle ist $\underline{\underline{(a,0)}}$.

b)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6axy^2 - \frac{2}{a} & 6ax^2y \\ 6ax^2y & 2ax^3 \end{pmatrix}$$

c) Einzige in Frage kommende Extremstelle ist die kritische Stelle $(a,0)$ aus a).
Es ist

$$Hf(a,0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a} & 0 \\ 0 & 2a^4 \end{pmatrix}$$

Die EW der Matrix sind $-\frac{2}{a}$ und $2a^4$.
Ergebnis:
Wenn $a<0$ ist, sind beide EW$>0$, d.h. $(a,0)$ ist eine lokale Minimalstelle.
Wenn $a > 0$ ist, haben die EW unterschiedliche Vorzeichen, d.h. es gibt dann keine lokale Extremstelle (die kritische Stelle ist eine Sattelstelle).

**A2) (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)**

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = \frac{3}{4}\,x^4 + 3\,x^2y + 2\,y^3$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 4\,.$$

(7 Punkte)

**Lösung:**

Wir setzen $g(x,y) := x^2+y^2-4$ und stellen das Gleichungssystem $\nabla f(x,y) = \lambda\,\nabla g(x,y)$, $g(x,y)=0$ auf:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 3x^3+6xy & = & 2\lambda x \\ \text{(II)} & 3x^2+6y^2 & = & 2\lambda y \\ \text{(III)} & x^2+y^2 & = & 4 \end{array}$$

Lösungsweg 1: (I) faktorisieren, das ergibt

$$x = 0 \;\vee\; 3x^2+6y = 2\lambda\,.$$

Fall 1: $x = 0$:
Mit (III) folgt $y=\pm 2$.

Fall 2: $x \neq 0$, also $3x^2+6y = 2\lambda$, dies in (II) eingesetzt ergibt $3x^2+\cancel{6y^2} = (3x^2+\cancel{6y})y$. Das vereinfacht sich zu $3x^2 = 3x^2y$. Wir dividieren durch $x$, was $\neq 0$ ist. Es folgt $y = 1$.
Es folgt mit (III): $x = \pm\sqrt{4-1} = \pm\sqrt{3}$.

Potenzielle Extremstellen sind somit $(0,\pm 2)$ und $(\pm\sqrt{3},1)$.

Nun dort die Funktionswerte vergleichen:
$f(0,\pm 2) = \pm 16$
$f(\pm\sqrt{3},1) = \frac{3}{4}\cdot 9 + 9 + 2 = \frac{27}{4} + 11 = 17\frac{3}{4}$

Ergebnis: Das gesuchte Maximum ist $\underline{\underline{17\frac{3}{4}}}$ (das ist $\frac{71}{4}$), das gesuchte Minimum ist $\underline{\underline{-16}}$.

Lösungsweg 2: (I) $\cdot\, y$ − (II) $\cdot\, x$ bilden:
$\rightsquigarrow\;\; (3x^3+\cancel{6xy})\,y = 2\lambda xy = (3x^2+\cancel{6y^2})\,x \;\Leftrightarrow\; x^3y = x^3 \;\Leftrightarrow\; x=0 \,\vee\, y=1,$
dann weiter wie bei Weg 1.

Alternative: Da man die Nebenbedingung leicht nach $x^2$ auflösen kann und in $f$ nur gerade Potenzen von $x$ vorkommen, ist es hier einigermaßen einfach möglich, die Nebenbedingung zu eliminieren:
Es ist $x^2 = 4-y^2$, und wir betrachten
$\tilde{f}(y) := f(\pm\sqrt{y^2-4},y) = \frac{3}{4}(4-y^2)^2 + 3(4-y)^2y + 2y^3$, wobei $D_{\tilde{f}} := [-2,2]$,
$= \frac{3}{4}(16-8y^2+y^4) + 12y - 3y^3 + 2y^3 = 12 - 6y^2 + \frac{3}{4}y^4 + 12y - y^3$
$\rightsquigarrow\;\; \tilde{f}'(y) = 3y^3 - 3y^2 - 12y + 12 = 3(y^3-y^2-4y+4) \stackrel{!}{=} 0$
Wir raten die Nullstelle $y=1$, und machen die Polynomdivision $(y^3-y^2-4y+4) : (y-1) = y^2-4$.
die Nullstellen von $\tilde{f}'$, also die kritischen Stellen von $\tilde{f}$, sind also $1, \pm 2$. Man beachte, dass die Ränder des Definitionsbereichs mit solchen Nullstellen übereinstimmen, d.h. nur an den genannten 3 Stellen können lokale Extremstellen liegen.
Man berechnet nun noch $\tilde{f}(\pm 2) = \pm 16$ und $\tilde{f}(1) = 17\frac{3}{4}$ und kommt auf das gleiche Resultat wie mit dem Lagrange-Formalismus.

**A3) (Fixpunktiteration)**

Wir betrachten die Funktion

$$\Phi(x) := \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{1+x^2}\right), \quad \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

a) Welche Zahl oder Zahlen $x \in \mathbb{R}$ ist/sind Fixpunkt(e) von $\Phi$?

b) Führen Sie zwei Iterationsschritte der Fixpunktiteration durch, zum Startwert $x_0 := 1$.

c) Berechnen Sie eine Kontraktionskonstante für $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
<u>Hinweise</u>: Die Abschätzung $2|ab| \leq a^2 + b^2$ aus dem 1. Semester, also $2|ab|/(a^2+b^2) \leq 1$, könnte nützlich sein. Und: Es ist möglich, aber *nicht* zwingend gefordert, die *kleinstmögliche* Kontraktionskonstante zu finden.

d) Ist die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergent? (kurze Begründung)

e) Prüfen Sie, ob die Fixpunktiteration quadratisch konvergent ist.

(3+2+2+1+1=9 Punkte)

**Lösung:**

a) $\Phi(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(x + \frac{x^2}{1+x^2}) = x \quad | \cdot 3\,;\ -x$
$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{1+x^2} = 2x \ \Leftrightarrow \quad x^2 = 2x(1+x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x = 2\,(1+x^2)$
$\Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - 1}$
$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$

b) $x_1 = \Phi(x_0) = \frac{1}{3}\,(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$
$x_2 = \Phi(x_1) = \frac{1}{3}\,(\frac{1}{2} + \frac{1/4}{5/4}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5+2}{10} = \frac{7}{30}$

c) $\Phi'(x) = \frac{1}{3}\,(1 + \frac{2x(1+\cancel{x^2}) - \cancel{x^2 \cdot 2x}}{(1+x^2)^2}) = \frac{1}{3}\,(1 + \frac{2x}{(1+x^2)^2})$
Mit dem Hinweis folgt $|\Phi'(x)| \leq \frac{1}{3}\,(1 + \frac{2|x|}{(1+x^2)^2}) \leq \frac{1}{3}\,(1 + \frac{1}{1+x^2})$
Den letzten Bruch kann man offensichtlich durch 1 abschätzen (und dies ist auch die bestmögliche Abschätzung, wie man für $x=0$ sieht).
Es folgt $|\Phi'(x)| \leq \underline{\underline{\frac{2}{3}}} =: k \quad (<1)$

<u>Alternative</u>: Nach Extremstellen von $\Phi'$ suchen. Dazu:
$\Phi''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1\cdot(1+x^2)^2 - x\cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \overset{\text{(kürzen)}}{=} \frac{2}{3} \cdot \frac{(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
$\Phi'(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}\,(1 \pm \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}}}{(1+\frac{1}{3})^2}) = \frac{1}{3}(1 \pm \frac{2\cdot 9\sqrt{\frac{1}{3}}}{16}) = \frac{1}{3}(1 \pm \frac{3\sqrt{3}}{8})$
Ferner $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \Phi'(x) = \frac{1}{3}$.
Der betragsmäßig größte dieser 4 Werte ist $k := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi'(x)| = \frac{1}{3}(1 + \frac{3\sqrt{3}}{8}) \approx 0.55$
(das ist die bestmögliche Kontraktionskonstante)

Weitere Alternative: Einige haben versucht, die Kontraktivitätseigenschaft direkt anhand ihrer Definition nachzuweisen. Das ist im Prinzip denkbar, aber ziemlich schwer, unter Klausurbedingungen kaum erfolgreich zu Ende zu führen:

$$\begin{aligned}
|\Phi(x)-\Phi(y)| &= \frac{1}{3}\left|x-y+\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{y^2}{1+y^2}\right| = \frac{1}{3}\left|x-y+\frac{x^2(1+y^2)-y^2(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&= \frac{1}{3}\left|x-y+\frac{x^2-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| = \frac{1}{3}\left|(x-y)+\frac{(x-y)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\le \frac{1}{3}\,|x-y|\cdot\left|1+\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\le \frac{1}{3},|x-y|\cdot\left[1+\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)}+\frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\right] \\
&\le \frac{1}{3}\,|x-y|\cdot\left[1+\frac{|x|}{1+x^2}+\frac{|y|}{1+y^2}\right] \le \frac{1}{3}\,|x-y|\cdot\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] \le \frac{2}{3}\,|x-y|
\end{aligned}$$

d) Da wir in c) eine Kontraktionskonstante $k<1$ gefunden haben, und der Definitionsbereich $R$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$, abgeschlossen ist, lässt sich der Fixpunktsatz von Banach anwenden, und der liefert u.a. die Konvergenz der Fixpunktiteration.

e) Wir berechnen die asymptotische Kontraktionskonstante und prüfen, ob diese $=0$ ist:
$k_* = |\Phi'(0)| = \frac{1}{3} \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ die Konvergenz ist nicht quadratisch

**A4) (Differentialgleichungen)**

a) (i) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 16\,y = 0\,.$$

(ii) Geben Sie eine Anfangsbedingung für die obige Differentialgleichung an, die folgende Anforderungen erfüllt:
Die Lösung $t \mapsto y(t)$ des Anfangswertproblems soll eindeutig bestimmt sein, soll nicht die Nullfunktion sein, und soll $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ erfüllen. (Angabe der Anfangsbedingung reicht, ohne Begründung.)

b) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = A\,\vec{y} \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = A\,\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Zur Zeitersparnis dürfen Sie verwenden (müssen Sie nicht zeigen):
Die Funktionen $\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden ein Fundamentalsystem.

(3+3+3=9 Punkte)

**Lösung:**

a) (i) Das Charakteristische Polynom lautet $\lambda^4 - 16 = 0$ und hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 2$ und $\lambda_{3,4} = \pm 2i$.
Ein komplexes Fundamentalsystem ist somit

$$\{e^{2t}, e^{-2t}, e^{2it}, e^{-2it}\}.$$

Daraus bekommt man (z.B. indem man Real- und Imaginärteil von $e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t$ nimmt) ein reelles Fundamentalsystem

$$\underline{\underline{\{e^{2t}, e^{-2t}, \cos 2t, \sin 2t\}}}.$$

(ii) Naheliegendste Lösung: $\underline{\underline{y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = 4, y'''(0) = -8}}$
Begründung (nicht verlangt): Das FS aus (i) zeigt, dass (nur) die Fundamentallösung $e^{-2t}$ den geforderten Limes hat, also wählt man diejenige Anfangsbedingung, die zu dieser Lösung $y(t) = e^{-2t}$ führt. Wichtig ist, dass man *vier* Angaben braucht, damit die Lösung eindeutig ist, da es sich um eine Dgl vierter Ordnung handelt.
Bemerkung: Es gibt auch noch andere Anfangsbedingungen, die man hier angeben kann; es sind exakt solche AB erlaubt, die zur Lösung $e^{-2t}$ oder einem Vielfachen von $e^{-2t}$ passen.

b) Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = (5-\lambda)^2 - 1 \overset{!}{=} 0$
$\Leftrightarrow\ 5-\lambda = \pm 1 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 5 \pm 1 \ \Leftrightarrow\ \lambda_1 = 4 \vee \lambda_2 = 6$
Eig(4): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Eig}(4) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$
Eig(6): $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Eig}(6) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$
Fundamentalsystem: $\left\{e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

c) Laut Hinweis ist $W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix. Wir kommen also mit dem Ansatz 'Variation der Konstanten', also $\vec{y}_p(t) = W(t)\,\vec{c}(t)$, auf das LGS $W(t)\vec{c}\,'(t) = \vec{b}(t)$. Wir lösen:

$$\begin{aligned} \vec{c}\,'(t) &= W(t)^{-1}\,\vec{b}(t) = \tfrac{1}{-e^{3t}}\begin{pmatrix} 0 & -e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1-e^t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} \\ t - e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y}_p(t) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\,e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + (t-e^t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}}}$$

Das kann man noch umformen zu

$$\vec{y}_p(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$$

Bem.: Wenn der letzte Umformungsschritt fehlt (oder fehlerhaft ist), kann man trotzdem noch volle Punkte geben.

**** bitte wenden ****

**A5) (Algebra)**

a) Vorbemerkungen zu a):
– Wer mag, kann die Kurzschreibweise „$k$“ anstelle von „$[k]_n$“ verwenden.
– Bei (i) und (ii) ist es erlaubt, das Ergebnis ohne Rechnung/Begründung anzugeben.

Wir betrachten $\mathbb{Z}_{20}^*$ :

(i) Geben Sie alle Elemente der Gruppe $\mathbb{Z}_{20}^*$ an.

(ii) Geben Sie die von $[7]_{20}$ sowie die von $[9]_{20}$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}_{20}^*$ an.

(iii) Hat $\mathbb{Z}_{20}^*$ eine Untergruppe, die zu $(\mathbb{Z}_3, +)$ isomorph ist? (Begründung)

(iv) Hat $\mathbb{Z}_{20}^*$ eine Untergruppe, die zu $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorph ist? (Begründung)

b) Wie viele Elemente hat die Gruppe $\mathbb{Z}_{500}^*$ ?

c) Berechnen Sie das Inverse von $[112]_{585}$

(i) in $(\mathbb{Z}_{585}, +)$ ,

(ii) in $(\mathbb{Z}_{585}, \cdot)$ .

d) Welchen Rest hat $k := 5^{21} + 2^{21}$ bei Division durch 126 ?
Hinweis: 21 kann man als Produkt schreiben.

(5+1+3+2 = 11 Punkte)

(Summe: 42 Punkte)

**** Viel Erfolg ! ****

**Lösung:**

a) (i) $\{[1]_{20}, [3]_{20}, [7]_{20}, [9]_{20}, [11]_{20}, [13]_{20}, [17]_{20}, [19]_{20}\}$
(auch in der Kurzschreibweise $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ wird das Ergebnis als richtig anerkannt)
(zur Kontrolle: $\phi(20) = \phi(2^2 \cdot 5) = \phi(2^2) \cdot \phi(5) = 2 \cdot 4 = 8 \rightsquigarrow$ passt)

(ii) $\langle [7]_{20} \rangle = \{[1]_{20}, [7]_{20}, [9]_{20}, [3]_{20}\} = \{[1]_{20}, [3]_{20}, [7]_{20}, [9]_{20}\}$
oder kurz: $\langle 7 \rangle = \{1, 7, 9, 3\} = \underline{\underline{\{1, 3, 7, 9\}}}$
(denn: $7 \cdot 7 = 49 \equiv 9 \pmod{20}$, $7 \cdot 7 \cdot 7 \equiv 7 \cdot 9 = 63 \equiv 3 \pmod{20}, ...$)
und
$\langle 9 \rangle = \underline{\underline{\{1, 9\}}}$

(iii) Nein, denn $\mathbb{Z}_{20}^*$ hat nach (i) 8 Elemente, und 3 ist kein Teiler von 8, also hat $\mathbb{Z}_{20}^*$ keine 3-elementige Untergruppe (Satz von Lagrange).

(iv) Ja. Denn die Untergruppe $\langle [7]_{20} \rangle$ von $\mathbb{Z}_{20}^*$ hat nach (ii) 4 Elemente, ist somit, da sie zyklisch ist, zu $\mathbb{Z}_4$ isomorph.
Bemerkung: Nur zu schreiben, dass 4 ein Teiler der Gruppengöße 8 ist, ist nicht ausreichend. Gegenbeispiel: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ hat 4 Elemente und hat dennoch keine Untergruppe, die zu $\mathbb{Z}_4$ isomorph ist.

b) $500 = 5 \cdot 10^2 = 5 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^3$
$\Rightarrow \; \Phi(500) = \Phi(2^2) \cdot \Phi(5^3) = (2^2 - 2) \cdot (5^3 - 5^2) = 2 \cdot 100 = \underline{\underline{200}}$

c) (i) $-[112]_{585} = [585 - 112]_{585} = \underline{\underline{[473]_{585}}}$

(ii) Mit Euklidischem Divisionsalgorithmus:
Fortwährend Division mit Rest:

$$\begin{array}{ll} 585 = 5 \cdot 112 + 25 & \rightsquigarrow \; \mathrm{ggT}(585, 112) = \mathrm{ggT}(112, 25) \\ 112 = 4 \cdot 25 + 12 & \phantom{\rightsquigarrow} \; = \mathrm{ggT}(25, 12) \\ 25 = 2 \cdot 12 + 1 & \phantom{\rightsquigarrow} \; = 1 \end{array}$$

(Bem.: Hieran sieht man schonmal, dass 585, 112 teilerfremd sind, also das gesuchte Inverse existiert.)
Nun liest man obige Rechnung rückwärts, um 1 als 'Linearkombination' von 585, 112 darzustellen:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 25 - 2 \cdot 12 \\ & = & 25 - 2 \cdot (112 - 4 \cdot 25) \\ & = & 9 \cdot 25 - 2 \cdot 112 \\ & = & 9 \cdot (585 - 5 \cdot 112) - 2 \cdot 112 \\ & = & 9 \cdot 585 - 47 \cdot 112 \end{array}$$

Darauf $[\cdot]_{585}$ anwenden:
$\rightsquigarrow \; [1]_{585} = [-47]_{585} [112]_{585}$
$\rightsquigarrow \; [112]_{585}^{-1} = [-47]_{585} = [585 - 47]_{585} = \underline{\underline{[538]_{585}}}$

d) Vorbemerkung: Die Rechnung verwendet die Schreibweise „ $[\cdot]_{126}$“; alternativ kann man diese Rechnung auch mit „... ≡ ... ≡ ... (mod 126)“ aufschreiben.

$[5^{21} + 2^{21}]_{126} = [5^{3 \cdot 7} + 2^{7 \cdot 3}]_{126} = [5^3]_{126}^7 + [2^7]_{126}^3 = [125]_{126}^7 + [128]_{126}^3 = [-1]_{126}^7 + [2]_{126}^3$
$= [(-1)^7]_{126} + [2^3]_{126} = [-1]_{126} + [8]_{126} = [7]_{126}$

Antwort: $\underline{\underline{7}}$