Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frauke Liers
Dipl.-Math. Lena Hupp

WS 2014/2015
02. April 2015

Klausur
"Mathematik für Ingenieure C3"

Name: .... | Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punktzahl	7	7	6	6	10	36	
erreichte Punktzahl							

1. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 2xy - 10y + 10$$

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extremstellen.

(b) (1.5 Punkte) Zeigen Sie, dass f genau einen globalen Extrempunkt besitzt.

(c) (2.5 Punkte) Der Definitionsbereich von f sei im Folgenden auf den Bereich

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$$

beschränkt. Geben Sie unter Anwendung des Lagrange-Formalismus alle stationären Punkte auf dem Rand von $\mathcal{B}$ an.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{so dass}\quad & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 24 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{LP}$$

(a) (1 Punkt) Bringen Sie (LP) in Standardform: $\min\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$

(b) Während des Lösens von (LP) mittels des Simplexalgorithmus ergibt sich folgendes Simplextableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
1	0	-1	2	0	24	
1	1	0	1	0	12	x_2
3	0	2	-1	1	12	x_5

(ST)

i. (0.5 Punkte) Begründen Sie kurz, warum (ST) nicht optimal ist.

ii. (2.5 Punkte) Führen Sie die nächste Iteration des Simplexalgorithmus für (ST) durch (nur eine weitere Iteration!). Was lässt sich über die Lösbarkeit von (LP) anhand des neuen Tableaus sagen?

(c) (2 Punkte) Geben Sie das zu (LP) duale Problem an.

(d) (1 Punkt) Für die Variablen aus (LP) soll nun zusätzlich gelten: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$. Wir nennen dieses neue Programm (GLP) ((LP) mit der zusätzlichen Ganzzahligkeitsbedingung an die Variablen). Welche Beziehung besteht zwischen dem Optimalwert von (LP) und dem Optimalwert von (GLP)?

3. Aufgabe (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + y = \frac{e^{-x}}{1 + x^2}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Hinweis: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$ kann verwendet werden.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = A\mathbf{y}(\mathbf{x})$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A besitze die komplexen Eigenwerte $\lambda_1 = -2 + i$ und $\lambda_2 = -2 - i$. Bestimmen Sie für obiges Differentialgleichungssystem:

- ein komplexes Fundamentalsystem
- die allgemeine reelle Lösung
- die Lösung für die Anfangsbedingung $\mathbf{y}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Aufgabe (10 Punkte)

(a) (3.5 Punkte) Bestimmen Sie das multiplikativ inverse Element zu $[4]_{21}$, falls ein solches existiert.

(b) (6.5 Punkte) Die European Article Number (EAN) ist eine Produktkennzeichnung für Handelsartikel. Jede gültige 13 stellige EAN $a_1 a_2 \dots a_{13}$ mit $a_1, \dots a_{13} \in \{0, \dots 9\}$ muss folgende Prüfgleichung erfüllen:

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \dots + a_{11} + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0 \mod 10$$

i. Rekonstruieren Sie die 6. Stelle der EAN: 40 004 a_6 7 02000 0

ii. Beweisen Sie, dass bei der EAN das Vertauschen von zwei aufeinander folgenden Ziffern erkannt wird, es sei denn ihre Differenz ist 5.