Verteilungen

Ein Verteilungswiki, dass durch die Teilnehmer/innen erstellt wird. Zur Prüfung zugelassen.

Diskrete Verteilungen

Seitenübersicht [Ausblenden]

Übersicht

1 Empirische Verteilung

$\hat{F}_n^X(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i,\infty)}(x), x \in \mathbb{R}$, $\hat{F}_n^X$ ist eine Realisierung von F_n^X

2 Gemischte Verteilung

$P^X = \alpha_d P_d^X + \alpha_s P_s^X, \alpha_s = 1 - \alpha_d$

$EX = \alpha_d E_d X + \alpha_s E_s X$

3 Laplace Verteilung

Beschreibt ein Zufallsexperiment mit *N* gleichwertigen Ausgängen.

$$P(\omega) = \frac{1}{N}, \omega \in \Omega$$

$$E[X] = \frac{N+1}{2}$$

$$Var[X] = \frac{N^2-1}{12}$$

4 Bernoulli-Verteilung

Verwendung: Zufallsexperimente mit genau zwei Ausgängen und der Erfolgswahrscheinlichkeit *p*.

Kurzschreibweise: $X \sim Ber_p$

Wahrscheinlichkeitsmaß zur Bernoulli-Verteilung/Z-Dichte: $f(x \mid p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{falls} \quad x = 0,1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Im allgemeinen gilt für die n-Fache Wiederholung eines Bernoulli-Experimentes über die Ergebnismenge $\Omega = \{0,1\}^n$:

$f(\omega_1, \ldots \omega_n) = p^k(1-p)^{n-k}$ mit $k = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$

Dichtefunktion: $f(x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$

5 Binomialverteilung

Kurzschreibweise: $B(n;p)$

Beschreibt die Wahrscheinlichkeit, bei der *n*-Fachen (unabhängigen) Ausführung eines Bernoulli-Experiments mit der Wahrscheinlichkeit *p*, genau *k* Erfolge zu erzielen.

Anzahl Kopf bei n-maligem Werfen einer Münzen (mehrfaches Ausführen eines Bernoulli-Exp., z.B. Mehrer Münzwürfe hintereinander)

Wahrscheinlichkeitsmaß zur Binomial-Zähldichte(Z)-Dichte: $b(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$E[S_n] = np$
$Var[S_n] = np(1-p)$
$B(n,p) = B(p)*...*B(p)$ (n-mal)
$B(n,p) * B(m,p) = B(n+m,p)$
$np \text{ klein} \implies B(n,p)$ kann für große n durch $\pi(np)$ angenähert werden
$n\ groß \implies F^{S_n} \approx \phi(\frac{x-a}{\sigma})$ mit $a = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

6 Geometrische Verteilung

-Variante A:
Wkt. beim k-ten Versuch Erfolg zu haben (z.B. Münzwurf)

Zähldichte: $geo^+(p;k) = (1-q)q^{k-1}$
Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor}, x \geq 0$

$E[Z] = \frac{1}{p}$
$Var(Z) = \frac{1-p}{p^2}$
$Nb^+(r,p) = geo^+(p)*...*geo^+(p)$ (r-mal)

-Variante B:

Wkt. k Fehlversuche vor erstem Erfolg zu haben (z.B. Münzwurf)

Z-Dichte: $geo^0(p;k) = (1-q)q^k$
Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X - 1 \leq x)1 - (1-p)^{\lfloor x+1 \rfloor}, x \geq 0$

$E[Z] = \frac{1-p}{p}$
$Var(Z) = \frac{1-p}{p^2}$

7 Poisson-Verteilung

Wahrscheinlichkeitsmaß zur Poisson-Z-Dichte: $f(k) = \pi(\lambda;k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Hierbei beschreibt λ den Erwartungswert und die Varianz.

Sei $Z \sim P(\lambda)$ verteilt.
$E[Z] = \lambda$
$Var(Z) = \lambda$

Faltung der Poissonverteilung:
$\pi(\lambda_1) * \pi(\lambda_2) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$

8 Dirac-Verteilung

Tritt meist als degenerierter Fall bei schlechter Parameterwahl von anderen Verteilungen auf (z.B. Bernoulli oder Binomial mit $p = 0$)

Verteilungsfunktion (Dirac-verteilt zum Punkt b): $F(x) = \begin{cases} 0 & x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$

$X \sim \delta_b$
$E[X] = b$
$Var[X] = 0$

9 Hypergeometrische Verteilung

Urnenmodell mit markierten Urnen, ohne Zurücklegen. K: Anzahl markeirte Kugeln gesamt, k: Anzahl gezogener markierter Kugeln, N: Summe markierter und nicht markierter Kugeln, n: gezogene Kugeln.

$$h(N,K,n;k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$E[Z_n] = n \cdot \frac{K}{N}$
$Var[Z_n] = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$

10 Negative Binomialverteilung

Zwischenwartezeiten auf den nächsten Erfolg bei einer Folge stoch. unabhängiger Bernoulli(p) Experimente. Wartezeit auf den r-ten Erfolg entspricht r-facher Faltung der $geo^{+}(p)$ Verteilung

In anderen Worten: Es beschreibt die Wahrscheinlich, dass *n* Versuche reichen, um *r* Erfolge zu erzielen.

$Nb^{+}(r,p;k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{k-r}$, k = r, r+1,...

$E[W_r] = \frac{r}{p}$ (Nb+)

$Var[W_r] = \frac{r(1-p)}{p^2}$

$Nb^{0}(r,p;k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{k}$, k = 0,1, ...

$E[W_r] = \frac{r(1-p)}{p}$ (Nb0)

$Var[W_r] = \frac{r(1-p)}{p^2}$

$Nb^{+}(r,p) = geo^{+}(p)*...*geo^{+}(p)$ (r-mal)

$Nb^{+}(r_1+r_2,p) = Nb^{+}(r_1,p) * Nb^{+}(r_2,p)$

Stetige Verteilungen

Seitenübersicht [Ausblenden]

Übersicht

1 1 Riemann-Dichte/ stetige Dichte

$$P((a,b]) = P([a,b]) = \int_a^b f(x)dx$$

2 2 Rechteckverteilung /Gleichverteilung

Die **Rechteck(a, b)-Verteilung** oder auch $\mathcal{R}(a,b)$ ist wiefolgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } x \in (a,b), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion für $\mathcal{R}(a,b)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{für } x \in (a,b], \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3 Exponentialverteilung

Hierbei beschreibt λ eine Ereignisrate, z.B. wie häufig Ereignisse in einem Zeitintervall eintreten.

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion von $Exp(\lambda)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{x} > 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\alpha}$$

$$Var[X] = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$Exp(\alpha) = \Gamma_{\alpha,1}$$

Faltung der Exponentialverteilung:
$\Gamma_{\alpha,n} = Exp(\alpha) * \ldots * Exp(\alpha)$ (n mal)

4 Beta(μ, ν) Verteilung

$$be_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)+\Gamma(\nu)} \cdot x^{\mu-1} \cdot (1-x)^{\nu-1} & \text{0<x<1} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{\mu}{\mu+\nu}$$

5 Gamma Verteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} \cdot x^{\nu-1} \cdot e^{-\alpha x}, & \text{if x > 0} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Mit $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} \cdot e^{-x} dx$

$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(\nu+1) = \nu \cdot \Gamma(\nu)$
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
$\Gamma(\nu) = (\nu-1)!$ für $\nu \in \mathbb{N}$

Faltung der Gamma Verteilung:
$\Gamma_{\alpha,\mu} * \Gamma_{\alpha,\nu} = \Gamma_{\alpha,\mu+\nu}$

X~$\Gamma_{\alpha,\nu}$ mit $E[X] = \frac{\nu}{\alpha}$
$Var[X] = \frac{\nu}{\alpha^2}$

6 Normalverteilung

kurz $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$:
$f(x) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma}), x \in \mathbb{R}$

Transformation zur Standardnormalverteilung:
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ führt dann zu $\Phi(Z)$ bzw. $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
und Dichte
$f^X(x) = \frac{1}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

Demnach gilt auch:

$$\begin{aligned} P(x \le X \le y) &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Faltung der Normalverteilung:
$\mathcal{N}(a, \sigma^2) * \mathcal{N}(b, \mu^2) = \mathcal{N}(a+b, \sigma^2 + \mu^2)$

Quantile:
$u_{p\%}^{\mathcal{N}(a,\sigma^2)} = a - u_{p\%}^{\mathcal{N}(0,1)}\sigma$

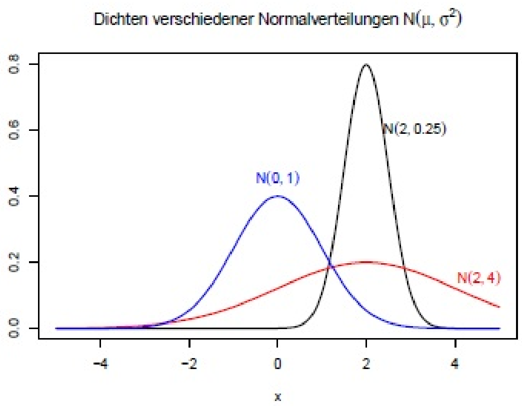
6.1 Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t.$$

X~$\mathcal{N}(0,1) \implies f^{|X|}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{, falls x > 0} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{4.8}$$



7 X_n^2 Verteilung

$Var[X] = 2n$

Ist X~$\mathcal{N}(0,1)$, so hat $F^{X^2}(y) = [2\Phi(\sqrt{y} - 1)] \cdot 1_{[0,\infty)}(y), y \in \mathbb{R}$

und $f^{X^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \phi(\sqrt{y}) \cdot 1_{[0,\infty)}(y), y \in \mathbb{R}$

und heißt Chi(1)-Quadrat-Verteilung (X_1^2) und ist gleich der $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ Verteilung

$X_n^2 = \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}} = X_1^2 * \ldots * X_1^2$ (n mal)

8 Student-t-Verteilung mit n Freiheitsgraden

sind zwei stoch. unabhängige ZV X~N(0,1), Y_n~X_n^2 gegeben, so hat die ZV $Z_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}}$ die Dichtefunktion

$$f^{Z_n}(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

Mehrdimensionale Verteilung

Seitenübersicht [Ausblenden]

Übersicht

1 Standardverteilung im $\mathbb{R}^n$

1.1 Standardnormalverteilung im $\mathbb{R}^n$

$X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$

Dichte:

$$f^X(x_1, \dots, x_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}x^T x}$$

1.2 Normalverteilung im $\mathbb{R}^n$

Sei $Y = \mathbf{a} + \mathbf{A}X$
$Y \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$
mit $K = \mathbf{AA}^T$

Randverteilungen:
Für $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$-verteilt sind die Y_i $\mathcal{N}(a_i, k_{ii})$-verteilt

Y ~ $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$-verteilt mit $\mathbf{K} = diag(\sigma_i^2) \leftrightarrow$ die Y_i sind stoch. unabhängig und $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$-verteilt

Dichte für $Y = \mathbf{a} + \mathbf{A}X$:

$$f^Y(y) = \frac{1}{\sqrt{|det\ \mathbf{K}|}} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}(y-a)^T (K^{-1})(y-a)}$$

Wichtige Werte:
$E[Y_i] = a_i$
Kovarianzmatrix $K = AA^T$ mit $k_{ij} = Kov(Y_i, Y_j)$ und $k_{ii} = Var(Y_i)$
wegen $EX_i^2 = 1$ und $EX_k X_l, k \neq l$, gilt: $Kov(Y_i, Y_j) = \mathbf{AA}^T$

Sonderfall:
Ist $Y \sim \mathcal{N}(a, K)$ verteilt und $Z = \mathbf{b} + \mathbf{B}Y$ regulär, dann ist $Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{b} + \mathbf{Ba}, \mathbf{BKB}^T)$ verteilt.
* Gilt auch, wenn $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$