Formelsammlung MatheC4

SoSe 2023 - Prof. Kräutle

Buy me a coffee

Wenn dir diese Zusammenfassung geholfen hat und du mir dabei helfen möchtest, noch mehr Zeit und Energie in weitere Skripte zu investieren, würde ich mich sehr über deine Unterstützung freuen.

1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

	Diskrete Verteilungen Es gibt eine endliche oder abzählbare Ergebnismenge (Ω).	**Absolutstetige Verteilungen** Die Ergebnismenge sind die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$).
Dichte	$f : \Omega \to [0,1] \quad , \; f(\omega) = P(\{\omega\})$ $\sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) = P(\Omega) = 1$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ $\int f(x)\, dx = 1$
Verteilung	$P(X) = F^X(t) = P^X(\,(-\infty\,, t]\,) = P(\{X \leq t\})$ $= P(\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq t\}) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$ $\lim\limits_{t \to -\infty} F^X(t) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{t \to +\infty} F^X(t) = 1$	
Wahrscheinlichkeitserzeugende Fkt.	$\hat{f}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k f(k)$	
Momenterzeugende Fkt. $\hat{f}\left(e^t\right) = M(t)$	$M(t) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} e^{t\omega} f(\omega)$	$M(t) = \int e^{tx} f(x)\, dx$
Erwartungs- / Mittelwert $m_1 = M'(0)$ $E(X) \;=\; m_1(P^X)$	$\sum\limits_{\omega \in \Omega} \omega f(\omega)$	$\int x f(x)\, dx$
k-tes Moment $m_k = M^{(k)}(0)$ $E(X^k) \;=\; m_k(P^X)$	$\sum\limits_{\omega \in \Omega} \omega^k f(\omega)$	$\int x^k f(x)\, dx$
Varianz $\hat{m}_2 = m_2 - m_1^2$ $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$	$\sum\limits_{\omega \in \Omega} (\omega - m_1)^2 f(\omega)$	$\int (x - m_1)^2 f(x)\, dx$
k-tes zentrales Moment $\hat{m}_k$	$\sum\limits_{\omega \in \Omega} (\omega - m_1)^k f(\omega)$	$\int (x - m_1)^k f(x)\, dx$

1.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

	Laplace	**Geometr.**	**Hypergeometrisch**	**Binomial**	**Poisson**
(Zähl-) Dichte	$\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$	$p \cdot q^{k-1}$	$\frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$f(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$
Erwartungswert	$\frac{\lvert\Omega\rvert + 1}{2}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{K}{N} n$	$\frac{k}{n} n = pn$	λ
Varianz	$\frac{\lvert\Omega\rvert^2 - 1}{12}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$n \cdot \frac{K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$	$npq = n \cdot \frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)$	λ

Geometrisch: „Das Ereignis tritt beim k-ten Versuch das erste Mal auf“
Hypergeometrisch: „Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachten der Reihenfolge“
Binomial: „Ziehen mit Zurücklegen, ohne Beachten der Reihenfolge“.

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Poisson: „Es ist nur der Durchschnitt bekannt wie oft ein Ereignis auftritt (z. B. Alle 10 Min, 3 mal). Aber mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ereignis dann zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt mit einer bestimmten Anzahl auf (z. B. Nach 4 Min., 2 Mal)“

1.2 Absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

	Uniform (Rechteck) $\mathcal{U}(a,b) = \chi_{[a,b]}$	**Exponential**
Dichte	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
Verteilung	$\begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a < x \leq b \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
Erwartungswert	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$
Varianz	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

	Standard- $\mathcal{N}(0,1)$	**Normalverteilung** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Dichte	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2}$
Verteilung	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt$ $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dt$
Erwartungswert	$m_k = 0$, für alle ungeraden k-ten Momente	μ
Varianz	1	σ^2

	Rayleigh	**Gamma**
Dichte	$\begin{cases} 0 & ,x \le 0 \\ \dfrac{x}{\beta^2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2} & ,x > 0 \end{cases}$	$\dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\lambda x} \quad , \ x > 0$
Verteilung	$F(t) = \begin{cases} 0 & ,t \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\beta}\right)^2} & ,t > 0 \end{cases}$	
Erwar-tungswert	$\beta\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$	$\mu = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ $E(X^2) = \dfrac{\alpha + \alpha^2}{\lambda^2}$
Varianz	$\beta^2 \cdot \left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	
		Gamma-Funktion: Fakultät auf $\mathbb{R}$ $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-1}\, dt$ • $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!$ • $\forall r \in \mathbb{R} : \Gamma(r+1) = x\,\Gamma(r)$ • $\Gamma(1) = 1\ ,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

2 Zufallsvariablen

Zufallsvariable $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P^X)$

Wahrscheinlichkeitsverteilung $P^X(A) = P(\{X \in A\}) = P(X^{-1}(A))$

Wahrscheinlichkeitsfunktion $f^X(y) = P^X(\{y\}) = P(\{X = y\})$

3 Zufallsvektoren (mehrstufige Zufallsexperimente)

Zufallsvektor $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P^X)$

$$\begin{tikzcd} (\Omega, \mathcal{A}, P) \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "X_k = Z_k \circ X"'] & (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P^X) \arrow[d, "Z_k"] \\ & (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P^{Z_k}) \end{tikzcd}$$

Marginalverteilung $P^{X_k}(B) = P^X(\{Z_k \in B\}) = \int \mathcal{X}\{Z_k \in B\}(x)\, f(x)\, dx$

Dichte der k-ten Maginalverteilung $f_k(x_k) = f^{X_k}(x_k) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_{(n-1)} f(x_1, \dots, x_n)\ \{dx_1 \dots dx_n\} \backslash dx_k$

Stochastisch unabhängig	**Voneinander abhängig**
$P^X(\{B_1 \times \ldots \times B_n\}) = P^{X_1}(B_1) \cdot \ldots \cdot P^{X_n}(B_n)$ $\Leftrightarrow \quad f^X(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$	$P(B) = \int_B f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2)$
$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$ $P(A \mid B) = P(A)$ $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$	$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2 \mid x_1)$ $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C) \cdot P(B \mid C) \cdot P(C)$$

Rechenregeln Erwartungswert

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

$$E(a\,X^n + b\,X^{n-1}) = \int (a\,x^n + b\,x^{n-1}) \cdot f(x)\, dx$$

$$E(XY) = \int xy \cdot f(x, y)\, dx\, dy$$

$$E(X) = \int x \cdot f(x, y)\, dy$$

$E(3XY) = 3E(X) \cdot E(Y)$ $E(G(X)) = \int y\, g(y)\, dy = \int G(x) f^X(x)\, dx$	

Rechenregeln Varianz

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$$

$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ $Cov(X, Y) = 0$	$Var(X+Y) = Var(X) + 2\, Cov(X, Y) + Var(Y)$

Blatt 8, P22, A24a

Faltung $$f^{X+Y}(y) = f^X * f^Y(y) = \underbrace{\sum_{x=0}^{y} f^X(x) \cdot f^Y(y - x)}_{\text{Für diskrete Verteilungen}} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f^X(y - x) \cdot f^Y(x)\, dx}_{\text{Für absolutstetige Verteilungen}}$$

4 Lebesgue-Integrale

Borel-Mengen Blatt 6, P16a

Lebesgue-Maß Ein eindeutiges Maß λ_n für den jeweiligen n-dimensionalen Flächeninhalt (bspw. im $\mathbb{R}^1$ die Intervallänge, im $\mathbb{R}^2$ der Flächeninhalt oder im $\mathbb{R}^3$ das Volumen).
Wird oft verwendet, wenn ein Punkt in einer Schnittfläche liegt: $P(X) = \dfrac{\lambda_2(A \cap M)}{\lambda_2(M)}$

Satz von Lebesgue $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k(x)\, dx = \int \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\, dx = \int f(x)\, dx$

Satz von Fubini Integrale im Mehrdimensionalen dürfen aufgeteilt werden, wobei die Reihenfolge egal ist: $\int_{\mathbb{R}^{m+n}} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m}\right)$

Normalbereich Eine Menge in der Form $M = [a, b] \times [c(x), d(x)]$
bzw. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\ ,\ c(x) \le y \le d(x)\}$

Transformationssatz $\int_{B=\Phi(I)} f(x)\, dx = \int_I f(\Phi(u)) \cdot |\det(J(\Phi(u)))|\, du$

	Polarkoordinaten	**Kugelkoordinaten**
Intervall	$I = \underbrace{[0,1]}_{r} \times \underbrace{[0,2\pi]}_{\rho}$	$I = \underbrace{[0,1]}_{r} \times \underbrace{[0,2\pi]}_{\rho} \times \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{\psi}$
Variablen	$x = \Phi_1(r,\rho) = r\cos\rho$ $y = \Phi_2(r,\rho) = r\sin\rho$	$x = \Phi_1(r,\rho,\psi) = r\cos(\rho)\cos(\psi)$ $y = \Phi_2(r,\rho,\psi) = r\sin(\rho)\cos(\psi)$ $z = \Phi_3(r,\rho,\psi) = r\sin\psi$
Determinante	$\det(J(\Phi(r,\rho))) = r$	$\det(J(\Phi(r,\rho,\psi))) = r^2\cos\psi$
Integral	$\int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\cos\rho, r\sin\rho) \cdot r\, d\rho\, dr$	...

Blatt 7, A19

Transformationssatz für Dichten
Dichte des Zufallsvektors G : $g(y) = \begin{cases} f(G^{-1}(y)) \cdot |\det(J(G^{-1}(y)))| & , y \in G(M) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

G und G' müssen differenzierbar und G zusätzlich bijektiv sein.

<u>Anwendung:</u>

1. Stelle die Dichte f auf, inklusive Bestimmung der Menge M
2. Bestimme die Funktion $G^{-1} : M^* \to M$ (löse das Gleichungssystem $y = G(x)$ nach x auf)
   $\to$ Bestimme $M^* = G(M)$
3. Berechne $g(y)$ (s. oben)
4. Aus $g(y)$ die Marginaldichten bestimmen (falls gefordert):
   $g_1(y_1) = \int_{y_2 \in M^*} g(y_1, y_2)\, dy_2$, $g_2(y_2) = \int_{y_1 \in M^*} g(y_1, y_2)\, dy_1$, $\left(\text{Kontrolle: } \int g_{1/2}(y_{1/2}) = 1\right)$

Blatt 9, A25b, P25b

5 Statistische Schätzmethoden

Ungleichung von Tschebyscheff $P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

Kovarianz $Cov(X,Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$
Rechenregeln:

- $Cov(X,X) = Var(X)$
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(X+a, Y+b) = Cov(X,Y)$
- $Cov(aX+bY, Z) = a\,Cov(X,Z) + b\,Cov(Y,Z)$
- $Cov(X, aY+bZ) = a\,Cov(X,Y) + b\,Cov(X,Z)$
- $Var(X+Y) = Var(X) + 2\,Cov(X,Y) + Var(Y)$

  Sind X und Y stochastisch unabhängig: $Cov(X,Y) = 0$

Kovarianzmatrix $C_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & \dots & Cov(X_1,X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n,X_1) & \dots & Cov(X_n,X_n) \end{pmatrix}$ Symmetrisch und positiv semidefinit

Ungleichung von Cauchy-Schwarz $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}$

Korrelationskoeffizient $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$, $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
Je nach Vorzeichen positiv, negativ oder unkorreliert.
Blatt 11, P30

Grenzwertsatz (der Binomialverteilung)
$P(\{X \leq m\}) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \Phi\left(\dfrac{m - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}\right)$, Φ ist Standardnormalverteilung
$(P(\{n \leq X \leq m\}) = P(\{X \leq m\}) - P(\{X \leq n\}))$
Gute Approximation für $np\,(1-p) \geq 9$
Für $p << 1$ und $n >> 1$ approximierbar durch Poisson mit $\mu = np$

Maximum-Likelihood-Methode
Bei absolutstetigen Verteilungen: $f(x;\lambda) = P(\{X_i \leq x\};\lambda)\,\dfrac{d}{dx}$
Bei diskreten Verteilungen: $f(x;\lambda) = P(\{X_i = x\};\lambda)$
Likelihood-Funktion: $L(\lambda) := L(\lambda; x_1, \dots, x_n) := \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda)$
$\rightarrow$ Maximum ausrechnen ($\nabla L(\lambda) = 0$)

Momenten-Methode
$E(X^k;\hat{\lambda}) = m_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$, $k = 1, \dots, r$

6 Beschreibende Statistik

Empirisches arithmetische Mittel (Durchschnitt) $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Empirischer Median (Zentralwert) $x_M = \begin{cases} \tilde{x}_{\frac{n+1}{2}} & , n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(\tilde{x}_{\frac{n}{2}} + \tilde{x}_{\frac{n}{2}+1}\right) & , n \text{ gerade} \end{cases}$

Modalwert (Dichtemittel) $X_D = x_m^*$ wobei $m = argmax(g_n(m)) = argmax(k_n(m))$

Empirische Varianz (Stichprobenvarianz) $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2}$

Empirische Kovarianz $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right) - n\,\overline{x}_n\,\overline{y}_n\right)$

Empirische Korrelationskoeffizient $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x\, s_y}$

Regressionsgerade (Ausgleichsgerade) $y(x) = \hat{a}\,(x - \overline{x}) + \overline{y}$, $\hat{a} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$

7 Weitere Formeln

Urnenmodell

$P(X = k) =$	Mit Reihenfolge	Ohne Reihenfolge
Mit Zurücklegen	$\frac{k}{N^k}$	$B(n;p;k)$
Ohne Zurücklegen	$\frac{k}{(N-1)\cdot \ldots \cdot (N-k+1)}$	$\frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

- N = Anzahl aller Kugeln
- K = Anzahl passender Kugeln
- n = Gesamtanzahl an Zügen
- k = Anzahl an Zügen passender Kugeln (Anzahl Treffer)
- p = Trefferwahrscheinlichkeit

P-Integral $\displaystyle\int X(\omega)P(d\omega) = \int X(\omega)\;dP = \sup\left\{\int Y(\omega)P(d\omega) \mid Y \leq X\right\}$

Umwandlung in P-Integral:

- Diskrete Verteilung: $\displaystyle\sum_{x\in\Omega} Y(x)f(x) = \int Y(x)\;P(dx)$
- Absolutstetige Verteilung: $\displaystyle\int Y(x)f(x)\;dx = \int Y(x)\;P(dx)$

Rechenregeln:

- $\displaystyle\int (aX+bY)\;dP = a\int X\;dP + b\int Y\;dP$
- $\displaystyle\int (X\cdot Y)\;dP = \int X\;dP \cdot \int Y\;dP$
- $\displaystyle\int Y(\omega)\;dP = \int G(X(\omega))\;dP = \int G(y)P^X(dy)$

Momente:

- k-tes Moment: $\displaystyle m_k(P) = \int x^k\;P(dx)$
- k-tes zentrales Moment: $\displaystyle \hat{m}_k(P) = \int (x - m_1(P))^k\;P(dx)$

Kugeln im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} K_n(r) &= \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+ \ldots +x_{n-1}^2+x_n^2 \leq r^2\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+ \ldots +x_{n-1}^2 \leq r^2-x_n^2\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}^n \mid |x_n|\leq r \;\wedge\; x_1^2+ \ldots +x_{n-1}^2 \leq r^2-x_n^2\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}^n \mid |x_n|\leq r \;\wedge\; \tilde{x}:=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in K_{n-1}(\sqrt{r^2-x_n^2})\} \end{aligned}$$

-
- $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} \quad , \quad I_1 = 2\;,\; I_2 = \dfrac{\pi}{2}$
- $\alpha_n = \alpha_{n-1}\, I_n \quad , \quad \alpha_1 = 2\;,\; \alpha_2 = \pi\;,\; \alpha_3 = \dfrac{4}{3}\pi$
- Volumen: $V_n(r) = \alpha_n r^n \quad , \quad v_1 = 2r\;,\; v_2 = \pi r^2\;,\; v_3 = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
- Oberfläche: $F_n(r) = V_n'(r)$

8 Unterstützung

Wenn dir diese Zusammenfassung geholfen hat und du mir dabei helfen möchtest, noch mehr Zeit und Energie in weitere Skripte zu investieren, würde ich mich sehr über deine Unterstützung freuen.

Diese Skripte kosten immer viel Zeit und Energie neben der normalen Prüfungsvorbereitung und damit würdest du mir zeigen, dass sich die Mühe lohnt. Diese kleinen Beträge fallen finanziell nicht ins Gewicht, halten aber vor allem meine Motivation hoch, auch in Zukunft weiterzumachen.