Klausur Mathematik für Ingenieure C4, Bachelor **SoSe 2023**

Donnerstag, 03.08.2023

Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

A1)

Wir werfen drei reguläre Würfel. Sei A das Ereignis, dass *keiner* der Würfel eine Eins zeigt. Sei B das Ereignis, dass *keiner* der Würfel eine Sechs zeigt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(\overline{A\cup B})$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Bemerkung: Potenzen müssen nicht ausgerechnet werden, Brüche müssen nicht auf einfachste Form gebracht werden.

b) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Eins gewürfelt wird, unter der Bedingung, dass mindestens eine Sechs gewürfelt wird?

Bemerkung: Bitte das Ergebnis als gekürzten Bruch hinschreiben.

(4+2=6 Punkte)

A2)

In einer Lostrommel befinden sich neun Lose, die von 1 bis 9 durchnumeriert sind. Es werden drei Lose ohne Zurücklegen gezogen, und diese drei Lose werden in einen Umschlag gesteckt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die drei Losnummern, die sich in dem Umschlag befinden, drei aufeinanderfolgende Nummern haben?

Bemerkung: Ergebnis als gekürzten Bruch hinschreiben.

(3 Punkte)

A3)

Seien X_1 und X_2 zwei diskrete, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Beide haben die Zähldichte

$$f(k) = P(\{X_i = k\}) = p\,(1-p)^k\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \quad i = 1, 2\,,$$

mit dem selben Parameter $p \in (0,1)$.
Berechnen Sie die Zähldichte (=Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Zufallsvariable $Y := X_1 + X_2$.

(2 Punkte)

A4)

Seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Sei X_1 uniform verteilt über der Menge $(0,1)\subset\mathbb{R}$, und sei X_2 exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda=1$. Stellen Sie die Dichte des Zufallsvektors $X=(X_1,X_2)$ auf und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $B:=\{|X_1-X_2|<1\}$.

(5 Punkte)

A5)

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_2,P)$, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß P die uniforme Verteilung über der Menge

$$M:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ 0<y<\cos x\right\}$$

sei.

Berechnen Sie $P(\{\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\})$.

(3 Punkte)

A6)

Die Zufallsvariable X sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda>0$. Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariable $Y:=e^X$.

(3 Punkte)

A7)

Seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängige, beide mit dem gleichen Parameter $\lambda>0$ exponentiell verteilte Zufallsvariable.

Bestimmen Sie die Dichte f^Y des Zufallsvektors $Y=(Y_1,Y_2)$, wobei

$$Y_1:=X_1^2\,,\quad Y_2:=\tfrac{1}{2}(X_1+X_2)\,.$$

(5 Punkte)

A8)

Die Zufallsvariable X sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda=1$. Sei $Y:=\min\{1,X\}$. Berechnen Sie $E(Y)$ und $E(Y^2)$.

Hinweis: Sie können verwenden: $\int x^2\,e^{-x}\,dx=-(2+2x+x^2)\,e^{-x}$

(5 Punkte)

**** *bitte wenden* ****

A9)

Seien $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen, mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Sei

$$Y := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad Z := n\,X_1\,.$$

Wie groß sind $E(Y)$, $E(Z)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Var}(Z)$, $\mathrm{Var}(X_1 + Y)$?

(4 Punkte)

A10)

Seien die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, also $P(\{X_i = 1\}) = p\,, P(\{X_i = 0\}) = 1 - p$ für alle $i = 1..., n$. Sei

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad p = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad n = 2500\,.$$

a) Benutzen Sie den Zentralen Grenzwertsatz und die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung, um

$$P(\{Y_{2500} < 550\})$$

näherungsweise zu bestimmen.

b) Benutzen Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung, um eine Schranke für

$$P(\{|Y_{2500} - E(Y_{2500})| > 200\})$$

zu bestimmen.

(2+2=4 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)

**** Viel Erfolg ! ****