Klausur Mathematik für Ingenieure C4, Bachelor **SoSe 2023**

Donnerstag, 03.08.2023

Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

A1)

Wir werfen drei reguläre Würfel. Sei A das Ereignis, dass *keiner* der Würfel eine Eins zeigt. Sei B das Ereignis, dass *keiner* der Würfel eine Sechs zeigt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(\overline{A\cup B})$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.
Bemerkung: Potenzen müssen nicht ausgerechnet werden, Brüche müssen nicht auf einfachste Form gebracht werden.

b) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Eins gewürfelt wird, unter der Bedingung, dass mindestens eine Sechs gewürfelt wird?
Bemerkung: Bitte das Ergebnis als gekürzten Bruch hinschreiben.

(4+2=6 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Es handelt sich um ein Laplace-Experimen, $\Omega=\{1,2,...,6\}^3$, $|\Omega|=6^3=216$.

a) $A=\{2,3,...,6\}^3 \rightsquigarrow |A|=5^3 \rightsquigarrow P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\underline{\underline{\frac{5^3}{6^3}}}$

$B=\{1,2,...,5\}^3 \rightsquigarrow |B|=5^3 \rightsquigarrow P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\underline{\underline{\frac{5^3}{6^3}}}$

$A\cap B=\{2,3,4,5\}^3 \rightsquigarrow |A\cap B|=4^3 \rightsquigarrow P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\underline{\underline{\frac{4^3}{6^3}}}$

Nun weiter mit Rechenregeln:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=2\cdot\frac{5^3}{6^3}-\frac{4^3}{6^3}$

$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{6^3-2\cdot 5^3+4^3}{6^3}$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})\overset{\text{deMorgan}}{=}P(\overline{A\cup B})=\frac{6^3-2\cdot 5^3+4^3}{6^3}$

b) Unter Verwendung von a) bekommen wir

$p=P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}\overset{(a)}{=}\frac{6^3-2\cdot 5^3+4}{6^3-5^3}=\frac{216-250+64}{216-125}=\underline{\underline{\frac{30}{91}}}$

A2)

In einer Lostrommel befinden sich neun Lose, die von 1 bis 9 durchnumeriert sind. Es werden drei Lose ohne Zurücklegen gezogen, und diese drei Lose werden in einen Umschlag gesteckt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die drei Losnummern, die sich in dem Umschlag befinden, drei aufeinanderfolgende Nummern haben?

Bemerkung: Ergebnis als gekürzten Bruch hinschreiben.

(3 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Variante 1: Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

Anzahl aller Ergebnisse: Es gibt $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7$ Möglichkeiten, drei Lose aus 9 Losen zu ziehen (d.h. 3-elementige Teilmengen einer 9-elementigen Menge zu bilden).

Günstige Ergebnisse: Diejenigen mit drei aufeinanderfolgenden Losnummern sind:
$\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}, ..., \{7, 8, 9\}$, das sind 7 Möglichkeiten.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$.

Variante 2: Man kann das Zufallsexperiment auch als Ziehen ohne Zurücklegen *mit* Beachtung der Reihenfolge beschreiben. Anstatt, wie oben, die Anzahl von dreielementigen Teilmengen zählen wir dann die Anzahl von Drei-Tupeln:
Es gibt insgesamt $9 \cdot 8 \cdot 7$ Möglichkeiten, ein Tripel zu ziehen. Davon sind $3! \cdot 7$ viele günstig. Es ergibt sich so ebenfalls die Wahrscheinlichkeit $\frac{6 \cdot 7}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{12}$.

Variante 3: Einige haben versucht, alle günstigen Elementarereignisse aufzuzählen, was etwas mühsam ist; in etwa so:
Ist der erste Zug 1, so gibt es für die beiden übrigen Züge 2 Möglichkeiten: $(2, 3)$ und $(3, 2)$.
Ist der erste Zug 2, so gibt es für die beiden übrigen Züge 4 Möglichkeiten: $(1, 3), (3, 1)$ und $(3, 4), (4, 3)$.
Ist der erste Zug 3, so gibt es für die beiden übrigen Züge 6 Möglichkeiten: $(1, 2), (2, 1)$ und $(2, 4), (4, 2)$ und $(4, 5), (5, 4)$.
Ist der erste Zug 4, so gibt es für die beiden übrigen Züge 6 Möglichkeiten: ...
Ist der erste Zug 5, so gibt es für die beiden übrigen Züge 6 Möglichkeiten: ...
Ist der erste Zug 6, so gibt es für die beiden übrigen Züge 6 Möglichkeiten: ...
Ist der erste Zug 7, so gibt es für die beiden übrigen Züge 6 Möglichkeiten: ...
Ist der erste Zug 8, so gibt es für die beiden übrigen Züge 4 Möglichkeiten: ...
Ist der erste Zug 9, so gibt es für die beiden übrigen Züge 2 Möglichkeiten: ...
Das sind insgesamt $2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 42$ günstige Elementarereignisse.
Insgesamt gibt es $9 \cdot 8 \cdot 7$ Tripel.
Ergebnis: $\frac{42}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6 \cdot \cancel{7}}{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{12}$.

A3)

Seien X_1 und X_2 zwei diskrete, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Beide haben die Zähldichte

$$f(k) = P(\{X_i = k\}) = p\,(1-p)^k\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \quad i = 1, 2\,,$$

mit dem selben Parameter $p \in (0,1)$.
Berechnen Sie die Zähldichte (=Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Zufallsvariable $Y := X_1 + X_2$.

(2 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Per (diskreter) Faltung:

$$\begin{aligned} P(\{Y=n\}) &= f^Y(n) = \sum_k f^{X_1}(n-k)\, f^{X_2}(k) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)\, f(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} p\,(1-p)^{n-k} \cdot p\,(1-p)^k = \sum_{k=0}^{n} p^2 (1-p)^n = \underline{\underline{(n+1)\, p^2 (1-p)^n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0}} \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man unsicher ist, über welche k zu summieren ist: Über solche, für die $f^{X_1}(n-k)\, f^{X_2}(k) > 0$, also solche, für die $n-k \in \mathbb{N}_0 \ \wedge\ k \in \mathbb{N}_0$, und das sind alle $k = 0, 1, ..., n$, für $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn man sich an keinerlei Formel erinnert, kann es es sich so überlegen:

$$\begin{aligned} P(\{Y=n\}) &= P(\{X_1 + X_2 = n\}) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} P(\{X_1 = n-k \ \wedge\ X_2 = k\}) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} P(\{X_1 = n-k\} \cap \{X_2 = k\}) \overset{\text{st.unabh.}}{=} \sum_{k=0}^{n} P(\{X_1 = n-k\}) \cdot P(\{X_2 = k\}) \\ &= \sum_k f^{X_1}(n-k)\, f^{X_2}(k) = ... \quad \text{(weiter wie oben)} \end{aligned}$$

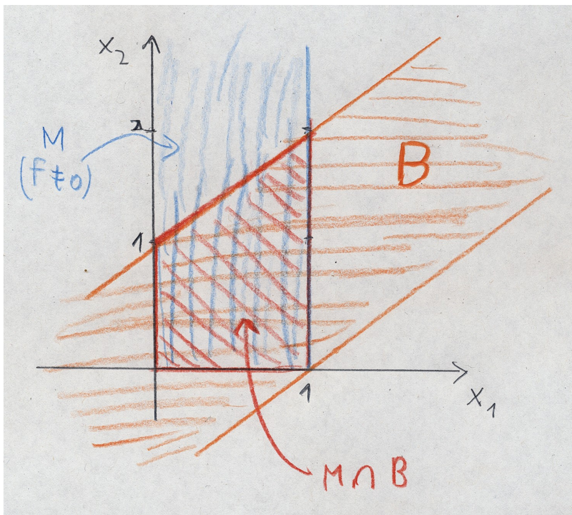
A4)

Seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Sei X_1 uniform verteilt über der Menge $(0,1) \subset \mathbb{R}$, und sei X_2 exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Stellen Sie die Dichte des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2)$ auf und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $B := \{|X_1 - X_2| < 1\}$.

(5 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Eine Skizze ist überaus hilfreich:



Der Bereich, in dem die Dichte von X von null verschieden ist: $M = (0,1) \times (0, \infty)$

Dichte: $f^X(x_1, x_2) \overset{\text{st.unabh.}}{=} f^{X_1}(x_1)\, f^{X_2}(x_2) = \begin{cases} e^{-x_2}\,, & (x_1, x_2) \in M \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$

Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wir suchen:

$B = \{|X_1 - X_2| < 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 1 < x_2 < x_1 + 1\}$

$B \cap M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 < 1\ ,\ 0 < x_2 < x_1 + 1\}$

$$\begin{aligned} P(B) &= \int\limits_B f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int\limits_{B \cap M} f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) \overset{(*)}{=} \int\limits_{x_1=0}^{1} \int\limits_{x_2=0}^{1+x_1} e^{-x_2}\, dx_2\, dx_1 \\ &= \int\limits_0^1 -e^{-x_2}\Big|_0^{1+x_1} dx_1 = \int_0^1 (1 - e^{-1-x_1})\, dx_1 = x_1 + e^{-1-x_1}\Big|_0^1 = \underline{\underline{1 + e^{-2} - e^{-1}}} \end{aligned}$$

An der Stelle (*) überlegt man sich, dass man für den Normalbereich $B \cap M$ am besten *erst* in x_2 und *dann* in x_1-Richtung integriert. Wenn man's umgekehrt macht, muss man $B \cap M$ in zwei Teile unterteilen.

A5)

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, P)$, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß P die uniforme Verteilung über der Menge

$$M := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,,\ 0<y<\cos x\right\}$$

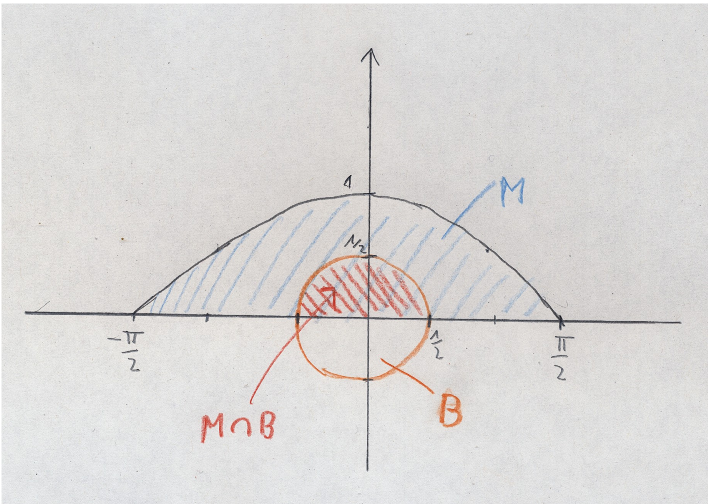
sei.

Berechnen Sie $P(\{\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\})$.

(3 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Eine Skizze kann nicht schaden:



Wir setzen $B:=\{\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\}$.

Es ist $\lambda_2(M) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$

und $\lambda_2(B\cap M) = \frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{8}$ (Halbkreis mit Radius $\frac{1}{2}$).

Somit $P(B) = \frac{\lambda_2(B\cap M)}{\lambda_2(M)} = \frac{\pi/8}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{16}}}$

A6)

Die Zufallsvariable X sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariable $Y := e^X$.

(3 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Da $G(x) := e^x$, $M \to M^*$, $M = \mathbb{R}^+$, $M^* = (1, \infty)$ so schön bijektiv ist, ist hier wohl der Transformationssatz für Dichten (gilt auch im Eindimensionalen!) der einfachste Weg:

$f^X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \in M = \mathbb{R}^+ \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$

$x = G^{-1}(y) = \ln y\,,$

$|\det(JG^{-1}(y))| = |(G^{-1})'(y)| = \frac{1}{y}$

Somit $f^Y(y) = f^X(G^{-1}(y)) \cdot |\det(JG^{-1}(y))| = \lambda\, e^{-\lambda \ln y} \cdot \frac{1}{y}$ für $y \in M^* = (1, \infty)$.

Ergebnis:

$$f^Y(y) = \begin{cases} \lambda\, \frac{1}{y}\, e^{-\lambda \ln y}, & y > 1 \\ 0\,, & y \leq 1 \end{cases}$$

<u>Alternative</u>: Über die Verteilungsfunktionen:

$F^X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^X(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau = -e^{-\lambda\tau}\Big|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0\quad , & t \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} F^Y(t) &= P(\{Y \leq t\}) = P(\{e^X \leq t\}) \underbrace{\cap \{X > 0\}}_{\text{wg. } f^X \text{ bzw. } M}) \\ &= P(\{X \leq \ln t\} \cap \{X > 0\}) \\ &= \begin{cases} P(\emptyset) = 0\,, & \text{falls } \ln t \leq 0 \text{ d.h. } t \leq 1 \\ F^X(\ln t) = 1 - e^{-\lambda \ln t}, & \text{falls } t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$f^Y(t) = \frac{d}{dt}\, F^Y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t}\, e^{-\lambda \ln t}, & t > 1 \\ 0\,, & t < 1 \end{cases}$$

Das Ergebnis kann man noch vereinfachen (kein Punktabzug, falls das fehlte):

$$f^Y(t) = \frac{d}{dt}\, F^Y(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{t^{\lambda+1}}, & t > 1 \\ 0\,, & t < 1 \end{cases}$$

A7)

Seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängige, beide mit dem gleichen Parameter $\lambda > 0$ exponentiell verteilte Zufallsvariable.
Bestimmen Sie die Dichte f^Y des Zufallsvektors $Y = (Y_1, Y_2)$, wobei

$$Y_1 := X_1^2 \,, \quad Y_2 := \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)\,.$$

(5 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Wir haben $f^X(x_1, x_2) \overset{\text{st.unabh.}}{=} f^{X_1}(x_1) \cdot f^{X_2}(x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda x_2}\,, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ =: M \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$
und $G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
Wir benutzen den Transformationssatz für Dichten. Dazu G^{-1}:
$x_1 = \sqrt{y_1}$ und
$x_1 + x_2 = 2y_2 \rightsquigarrow x_2 = 2y_2 - x_1 = 2y_2 - \sqrt{y_1}$
Den Rand von $M^* = G(M)$ findet man, indem man $x_1 = 0 \wedge x_2 \geq 0$ sowie $x_1 \geq 0 \wedge x_2 = 0$ betrachtet und schaut, welche y-Werte man dafür bekommt, nämlich einmal $y_1 = 0$ und einmal $y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{y_1}$. Also ist $M^* = \{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid y_2 > \frac{1}{2}\sqrt{y_1}\}$.
Ferner $|\det(JG^{-1}(y_1, y_2))| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ * & 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{y_1}}$.
Somit $f^Y(y_1, y_2) = f^X(G^{-1}(y_1, y_2))\,|\det(JG^{-1}(y_1, y_2))| = \lambda^2 \cancel{e^{-\lambda\sqrt{y_1}}}\, e^{-\lambda(2y_2 \cancel{-\sqrt{y_1}})} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_1}}$ für $(y_1, y_2) \in M^*$.
Ergebnis:

$$f^Y(y_1, y_2) = \begin{cases} \lambda^2 \frac{1}{\sqrt{y_1}}\, e^{-2\lambda y_2}\,, & (y_1, y_2) \in M^* = \{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid y_2 > \frac{1}{2}\sqrt{y_1}\} \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

A8)

Die Zufallsvariable X sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda=1$. Sei $Y := \min\{1, X\}$. Berechnen Sie $E(Y)$ und $E(Y^2)$.

Hinweis: Sie können verwenden: $\int x^2\, e^{-x}\, dx = -(2+2x+x^2)\, e^{-x}$

(5 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Wir benutzen den Kompositionssatz: $E(g(X)) = \int g(x)\, f^X(x)\, dx$:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E(\min\{1, X\}) = \int \min\{1, x\}\, f^X(x)\, dx = \int_0^\infty \min\{1, x\}\, e^{-x}\, dx \\
&= \int_0^1 x\, e^{-x}\, dx + \int_1^\infty e^{-x}\, dx \\
&\overset{\text{(p.I.)}}{=} x\,(-e^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot (-e^{-x})\, dx + \int_1^\infty e^{-x}\, dx \\
&= -e^{-1} + \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-1} - \left(e^{-x}\Big|_0^\infty\right) = \underline{\underline{1 - e^{-1}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= E(\min\{1, X^2\}) = \int \min\{1, x^2\}\, f^X\, dx \\
&= \int_0^1 x^2\, e^{-x}\, dx + \int_1^\infty e^{-x}\, dx \\
&\overset{\text{(Hinw.)}}{=} -(2+2x+x^2)\, e^{-x}\Big|_0^1 + e^{-1} = -5\, e^{-1} + 2 + e^{-1} \\
&= \underline{\underline{2 - 4\, e^{-1}}}
\end{aligned}
$$

A9)

Seien $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen, mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Sei

$$Y := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad Z := n\, X_1\,.$$

Wie groß sind $E(Y)$, $E(Z)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Var}(Z)$, $\mathrm{Var}(X_1 + Y)$?

(4 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Es ist $E(X_i) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ für alle $i = 1, ..., n$.
Mit den Rechenregeln folgt:

$$\begin{array}{lcl}
E(Y) & = & E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = \underline{\underline{n\mu}} \\
E(Z) & = & E(nX_1) = n\, E(X_1) = \underline{\underline{n\mu}} \\
\mathrm{Var}(Y) & = & \mathrm{Var}(X_1 + ... + X_n) \stackrel{(*)}{=} \mathrm{Var}(X_1) + ... + \mathrm{Var}(X_n) = \underline{\underline{n\,\sigma^2}} \\
\mathrm{Var}(nX_1) & = & n^2\, \mathrm{Var}(X_1) = \underline{\underline{n^2\sigma^2}}
\end{array}$$

An der Stelle (*) wird gebraucht, dass die X_i stochastisch unabhängig sind.

Zu $\mathrm{Var}(X_1 + Y)$:

Vorsicht, folgende Rechnung ist *falsch*:

$\mathrm{Var}(X_1 + Y) \stackrel{\text{falsch!}}{=} \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 + n\sigma^2 = (n+1)\,\sigma^2$
Dies würde erfordern, dass X_1 und Y stochastisch unabhängig sind, aber das sind sie i.a. nicht.

Stattdessen so:

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{Var}(X_1 + Y) & = & \mathrm{Var}(2X_1 + X_2 + ... + X_n) \stackrel{(*)}{=} \mathrm{Var}(2X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + ... + \mathrm{Var}(X_n) \\
 & = & 4\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + ... + \mathrm{Var}(X_n) = 4\sigma^2 + (n-1)\,\sigma^2 = \underline{\underline{(n+3)\,\sigma^2}}
\end{array}$$

A10)

Seien die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, also $P(\{X_i = 1\}) = p$, $P(\{X_i = 0\}) = 1-p$ für alle $i = 1..., n$. Sei

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad p = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad n = 2500\,.$$

a) Benutzen Sie den Zentralen Grenzwertsatz und die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung, um

$$P(\{Y_{2500} < 550\})$$

näherungsweise zu bestimmen.

b) Benutzen Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung, um eine Schranke für

$$P(\{|Y_{2500} - E(Y_{2500})| > 200\})$$

zu bestimmen.

(2+2=4 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Wir wissen, dass Y_n binomialverteilt ist.
Es ist $E(Y_n) = np$ und $\mathrm{Var}(Y_n) = np(1-p)$,
also $E(Y_{2500}) = 500$ und $\mathrm{Var}(Y_{2500}) = 400$.

a) Die Standardisierung von Y_n ist

$$\tilde{Y}_n := \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}} = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{Y_{2500} - 500}{20}$$

Wir formen die gegebene Bedingung in eine Bedingung an $\tilde{Y}_n$ um:

$$\begin{aligned}
&P(\{Y_{2500} < 550\}) && |-500\\
&= P(\{Y_{2500} - 500 < 50\}) && |:20\\
&= P(\{\tfrac{Y_{2500}-500}{20} < 2.5\}) \overset{\text{(ZGWS)}}{\approx} \underline{\underline{\Phi(2.5)}}
\end{aligned}$$

b)

$$P(\{|Y_{2500} - E(Y_{2500})| > 200\}) \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}(Y_{2500})}{200^2} = \frac{400}{200^2} = \frac{2}{200} = \underline{\underline{\frac{1}{100}}}$$

(Summe: 40 Punkte)