

Kriterien für σ -Algebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
- $\forall k \in \mathbb{N} : A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Von einer Menge erzeugte σ -Algebra:

- die kleinstmögliche σ -Algebra, die diese Menge enthält
- Menge betrachten und weitere Elemente gemäß den Regeln für σ -Algebren hinzufügen

Diskrete Verteilungen:

Laplace, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Mittelwert: $\frac{n+1}{2}$, Varianz: $\frac{n^2-1}{12}$

Binomialverteilung: $P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Mittelwert: np , Varianz: npq

Eine Reihe von Bernoulli-Experimenten ist binomialverteilt

Für $p \ll 1$ und $n \gg 1$ approximierbar durch Poisson mit $\mu = np$

Für $npq \geq 9$ approximierbar durch Normalverteilung über den ZGWS.

Es gilt: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \phi\left(\frac{n-np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{n-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Poisson-Verteilung: $P(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$

Mittelwert = Varianz = μ

geometrische Verteilung: $P(k) = p q^{k-1}$

Mittelwert = $1/p$, Varianz: $\frac{q}{p^2}$

hypergeometrische Verteilung: $P(k) = \frac{\binom{k}{n} \binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Mittelwert = $n \cdot \frac{k}{N}$, Varianz: $n \cdot \frac{k}{N} \cdot \left(1 - \frac{k}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Urnenmodell:

- ziehen mit zurücklegen, Reihenfolge wichtig: N^n
- ziehen ohne zurücklegen, Reihenfolge wichtig: $\frac{N!}{(N-n)!}$
- ziehen mit zurücklegen, Reihenfolge unwichtig: binomialverteilt
- ziehen ohne zurücklegen, Reihenfolge unwichtig: hypergeometrisch-verteilt

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$

Stochastische Unabhängigkeit:

- Sind die Ereignisse A u. B stoch. unabh., gilt:
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Diskrete Momente u. Varianz

- Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion: $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n, z \in [0,1]$
- Momenterzeugende Funktion: $M(t) = \sum_{x \in \mathcal{X}} e^{tx} \cdot f(x) = \hat{f}(e^t)$
- k -tes absolutes Moment:
 - $m_k = \sum_{x \in \mathcal{X}} x^k f(x) = M'(0)$
 - $m_k = M^{(k)}(0)$, also die k -te Ableitung der mom. z. F. an Stelle 0
- Mittelwert: $m_1 = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot f(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot P(\{x\})$
- k -tes zentrales Moment:
 - $\hat{m}_k(P) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - m_1(P))^k \cdot f(x)$ für $k \geq 2$
 - $\hat{m}_1 = 0$
 - Varianz: $\hat{m}_2 = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - m_1(P))^2 \cdot f(x)$
 - Steinerscher Satz: $\hat{m}_2 = m_2 - m_1^2$
 - Standardabweichung: $\sqrt{\hat{m}_2}$
- Tschebyscheffsche Ungleichung:
 - $\{x \in \mathcal{X} \mid |x - m_1(P)| \geq \varepsilon\} : P(B_\varepsilon) \leq \frac{\hat{m}_2(P)}{\varepsilon^2}$
 - $\{x \in \mathcal{X} \mid |x - m_1(P)| \leq \varepsilon\} : P(B_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\hat{m}_2(P)}{\varepsilon^2}$

Diskrete Zufallsvariablen

- $P^X: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0,1]$ heißt ($\mathcal{W}'$ -) Verteilung von X
- $f^X: \mathcal{X} \rightarrow [0,1]$ heißt $\mathcal{W}'$ Funktion / Zähldichte von X
- Formulierung „eine ZV X sei bsp. Poisson verteilt“ gibt Auskunft über Dichte von X : $P^X(\{k\}) = f^X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$
- Faltung: $f^X * f^Y = \sum_{n=0}^{\infty} f^X(k) \cdot f^Y(n-k)$
 - $f^{X+Y} = f^X * f^Y$ gilt, wenn X, Y stoch. unabh.
 - $\hat{f}^{X+Y} = \hat{f}^X \cdot \hat{f}^Y, M^{X+Y} = M^X \cdot M^Y$, wenn X, Y stoch. unabh.

· Erwartungswert (= Mittelwert einer ZV)

$$\cdot E(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot f^X(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot P(\{x\})$$

$$\cdot E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

$$\cdot E(X) = m_1(P^X) = M'(0)$$

$$\cdot E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\cdot E(XY) = E(X)E(Y), \text{ wenn } X, Y \text{ stoch. unabh.}$$

· Varianz:

$$\cdot \text{Var}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - E(X))^2 \cdot f^X(x)$$

$$\cdot \text{Var}(X) = \hat{m}_2(P^X) = m_2 - m_1^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Geometrische Wahrscheinlichkeit:

· Borel-Menge: Eine Menge, die sich durch die Vereinigung von elementaren Mengen des $\mathbb{R}^n$ konstruieren lässt (Rechteck, Dreieck, Kreis, ...)

· Borel-Lebesgue-Maß: $\lambda_n(I) = |I|$, also die „Größe“ des Körpers im $\mathbb{R}^n$

· Nullmenge: Menge mit Maß null

· Satz von Fubini: Zerlegung von $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ in $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \cdot \text{damit gilt: } \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$\cdot \text{und: } \int_M f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$

· Polarkoordinatentransformation:

Sei M eine kreisförmige Fläche in $\mathbb{R}^2$ bzw. ein kugelförmiges Volumen in $\mathbb{R}^3$, dann gilt:

$$\cdot \int_{M_2} f(x, y) d(x, y) = \int_I f(\phi(r, \varphi)) \cdot |\det Jf(\phi(r, \varphi))| d(r, \varphi)$$

$$\text{mit } x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, |\det Jf(\phi(r, \varphi))| = r$$

$$\text{Für Einheitskreis: } r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\cdot \int_{M_3} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_I f(\phi(r, \varphi, \psi)) \cdot \det |Jf(\phi(r, \varphi, \psi))| d(r, \varphi, \psi)$$

mit $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$,

und $\det |Jf(\phi(r, \varphi, \psi))| = r^2 \cos \psi$

Für Einheitskugel: $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$

Kontinuierliche / absolutstetige Verteilungen:

Exponentialverteilung: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}^+$

Mittelwert: $1/\lambda$, Varianz: $1/\lambda^2$

Uniforme Verteilung: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n(M)} & , \text{ falls } x \in M \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

Mittelwert: $\frac{a+b}{2}$, Varianz: $\frac{(b-a)^2}{12}$; $P(B) = \frac{\lambda_n(B \cap M)}{\lambda_n(M)} = \frac{\text{Günstige}}{\text{Alle}}$

allg. Normalverteilung: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Mittelwert: μ , Varianz: σ^2

Standard Normalverteilung: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \mathcal{N}(0, 1)$

Rayleigh - Verteilung: $f(t) = \begin{cases} t/p^2 \cdot e^{-1/2 \cdot (t/p)^2} & , t > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

Mittelwert: $\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, Varianz: $\frac{4-\pi}{2} \sigma^2$

Verteilungsfunktion:

Verteilungsfunktion: $F(t) = P((-\infty, t]) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$

$F(t)$ ist eine Verteilung gdw. folgende Eigenschaften erfüllt sind:

• $F(t) \in [0, 1]$

• $F(t)$ ist schwach monoton wachsend

• $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

• $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$

• rechtsseitig stetig / überall stetig

• Berechnung der W'keit von Intervallen:

• $P([a, \infty)) = 1 - P((-\infty, a]) = 1 - F(a)$

• $P([a, b]) = F(b) - F(a)$

→ im kontinuierlichen Fall ist die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses $P(\{t\}) \stackrel{!}{=} 0$, deshalb ist offene M = geschl. Menge

Kontinuierliche Momente u. Varianz:

- Momenterzeugende Funktion: $M(t) = \int e^{tx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{tx} f(x) dx$
- h -tes absolutes Moment:
 - $m_h = \int x^h f(x) dx$
 - $m_h = M^{(h)}(0)$
 - Mittelwert: $m_1 = \int x f(x) dx$
- h -tes Zentrales Moment:
 - $\hat{m}_h = \int (x - m_1(P))^h f(x) dx$ für $h \geq 2$
 - Varianz: $\hat{m}_2 = \int (x - m_1(P))^2 \cdot f(x) dx$
 - Steinerscher Satz: $\hat{m}_2 = m_2 - m_1^2$
- Tschebyscheffsche Ungleichung:
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - m_1(P)| \geq \varepsilon\} : P(B_\varepsilon) \leq \frac{\hat{m}_2(P)}{\varepsilon^2}$
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - m_1(P)| \leq \varepsilon\} : P(B_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\hat{m}_2(P)}{\varepsilon^2}$

Kontinuierliche Zufallsvariablen:

- P^X ist die Verteilung der ZV X mit dem elem. Zusammenhang:
 - $P(\{X \leq t\}) = P(\{X \in (-\infty, t]\}) = P^X((-\infty, t]) = F^X(t)$
 - $P(\{a \leq X \leq b\}) = P(\{X \in [a, b]\}) = F^X(b) - F^X(a)$
- h -te Marginaldichte (Dichte der h -ten Komponente X_h einer gemeinsamen Dichte $f(x_1, \dots, x_h, \dots, x_n)$ ist:
 - $f_h^X(x_h) = \int f(x_1, \dots, x_h, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$
- Faltung: Sind X, Y stoch. un. ZV, dann gilt:
 - $f^{X+Y}(t) = (f^X * f^Y)(t) = \int_{\mathbb{R}} f^X(t-s) f^Y(s) ds$
 - $Z := X + Y$ ist absolut stetig
- zweistufige ZVE:
 - sind X, Y stoch. unabh.:
 - $f(x, y) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
 - sind X, Y stoch. ab.:
 - $f(x, y) = f(x_1) \cdot f(x_2 | x_1)$
 - $P(B) = \int_B f(x, y) d(x, y)$

$$E(x) = \int x f^x(x) dx$$

Soll $E(y)$ gefunden werden, und $y := G(x)$, dann ist:

$$E(y) = E(G(x)) = \int_M G(x) \cdot f^x(x) dx, \text{ wobei } M \text{ Menge, auf der } f^x(x) \neq 0$$

Transformationssatz für Dichten:

Gesucht: Dichte $g(y) = f \cdot (G^{-1}(y)) \cdot |\det J G^{-1}(y)|$

$$1. G(x) = \begin{cases} y_1 = G_1(x_1, x_2) = \dots & (\text{gegeben als } y_1 = \dots) \\ y_2 = G_2(x_1, x_2) = \dots & (\text{gegeben als } y_2 = \dots; \text{ falls nicht: } y_2 = x_1) \end{cases}$$

$$2. G^{-1}(y) = \begin{cases} x_1 = \dots & (G \text{ nach } x_1 \text{ auflösen}) \\ x_2 = \dots & (G \text{ nach } x_2 \text{ auflösen}) \end{cases}$$

$$3. M := \{(x_1, x_2) | \dots\} \text{ (wie } x \text{ def. ist)}$$

$$4. M^* := \{(y_1, y_2) | \dots\} \text{ (wie } y \text{ aus } x \text{ def. ist)}$$

$$5. |\det J G^{-1}(y)| = \dots$$

$$6. g(y) = \begin{cases} f \cdot (G^{-1}(y)) \cdot |\det J G^{-1}(y)|, & y \in M^* \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Kovarianz:

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E X_1 E X_2$$

→ beschreibt das Verhältnis von zwei ZV; 0 bei stoch. unabh.

Rechenregeln:

$$\cdot Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$\cdot Cov(X, X) = Var(X)$$

$$\cdot Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1)$$

$$\cdot Var(X_1 \pm X_2) = \begin{cases} Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2), & X_1 \text{ u. } X_2 \text{ stoch. unabh.} \\ Var(X_1) + Var(X_2), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\cdot Var(a) = 0$$

$$\cdot Cov(X_1 + a, X_2 + b) = Cov(X_1, X_2)$$

$$\cdot Cov(a_1 X_1 + a_2 X_2, Y) = a_1 Cov(X_1, Y) + a_2 Cov(X_2, Y)$$

Kovarianzmatrix für Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)$

$$C_X = \begin{pmatrix} \text{Cov}(X_1, X_1) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \dots & \text{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix} \quad \text{symm. pos. def.}$$

Cauchy - Schwarz - Ungleichung: $|\text{Cov}(X_1, X_2)| \leq \sqrt{\text{Var} X_1} \cdot \sqrt{\text{Var} X_2}$

Korrelationskoeffizient $\rho = \rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var} X_1} \sqrt{\text{Var} X_2}} \in [-1, 1]$

→ für: $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$: X_1 u. X_2 sind unkorreliert

$\text{Cov}(X_1, X_2) > 0$: X_1 u. X_2 sind pos. korreliert

$\text{Cov}(X_1, X_2) < 0$: X_1 u. X_2 sind neg. korreliert

Statistik - Punktschätzer:

Schätzfunktion $\hat{\theta}_n$:

• erwartungstreu (unverzerrt), falls $E(\hat{\theta}_n) = \theta$

• asymptotisch erwartungstreu, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$

• konsistent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

• konsistent, wenn asymp. erwartungstreu und $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$

Maximum - Likelihood - Methode:

• $L(\theta) = L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f^X(x_i; \theta)$

• Maximum suchen: $\frac{d}{d\theta} L(\theta) \stackrel{!}{=} 0$

• Verifizieren, dass es sich um Maximum handelt: $\frac{d^2}{d^2\theta} L(\theta) \stackrel{!}{<} 0$

Momentenmethode:

• $E(x^k)$ berechnen (bei bekannter Verteilung: wissen!)

• $E(x^k) \stackrel{!}{=} m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$ mit $k = 1, \dots, r$ (r Gl. für r Param.)