

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben ist die Menge M als

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_2 \leq x_1\}.$$

Skizzieren Sie die Menge M .

Auf M ist die Zufallsvariable $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ gleichverteilt. Geben Sie die gemeinsame Dichte $f^{(X_1, X_2)}$ an und bestimmen Sie die Randdichten $f^{(X_1)}$ und $f^{(X_2)}$.

Überprüfen Sie, ob X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben ist die Stichprobe $\mathbf{x} = (2, 1, 2, 3, 2)$ einer Grundgesamtheit X mit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Schätzen Sie den Parameter λ mit der Maximum-Likelihood-Methode. Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Schätzfunktion $\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$. Welche Schätzung für λ ergibt sich aus der Stichprobe \mathbf{x} ?

Zeigen Sie, dass die Schätzfunktion $\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n) = (\bar{x})^{-1}$ nicht erwartungstreu für λ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

An den drei Füßen des Ständers einer Dampfturbine wurden über eine längere Betriebsdauer Ermüdungserscheinungen protokolliert:

Fuß Nr.	1	2	3
Anzahl der Mängel	12	10	14

Kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% angenommen werden, dass das Versagen der Beine gleichverteilt ist?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Initiative *BlendYourCoffein* stellt die Kaffeemischungen Z_1 (Galaxyblend) und Z_2 (Thrustblend) her.

Für den Koffeingehalt der Ausgangssorten Y_1 und Y_2 gilt:

$$Y_1 \sim \mathcal{N}(1, 2; 1) \text{ und } Y_2 \sim \mathcal{N}(2, 6; 1).$$

Es gibt keinen stochastischen Zusammenhang zwischen Y_1 und Y_2 .

Für die Kaffeemischungen Z_1 und Z_2 gilt:

$$Z_1 = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

$$Z_2 = \alpha_2 Y_1 + \alpha_1 Y_2,$$

mit $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$.

- Geben Sie die Verteilung von $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ an.
- Berechnen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$.
- Bestimmen Sie die Verteilung und die Riemann-Dichte von \mathbf{Z} .
- Geben Sie die Randverteilungen für Z_1 und Z_2 an.
- Für welche Wahl der α_1 und α_2 sind Z_1 und Z_2 stochastisch unabhängig?