FOLGEN

Monotonie: $a_{n+1} - a_n \geq 0$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (sms)
Schranke: $|a_n| \leq s$ (obere Schranke)
Supremum: kleinste obere Schranke
Infimum: größte untere Schranke
⚠ Schranke muss nicht Teil der Def.Menge sein

Epsilon-Kriterium: → zeigt Konvergenz
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon$
Bsp: $a_n = \frac{1}{n}$ → $\lim_n a_n = 0$ → $|a_n - 0| \leq \varepsilon$
→ $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ → $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ → $n_0(\varepsilon) = \max\{1, \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil\}$

Cauchy-Kriterium → zeigt Konvergenz
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > n > n_0 : |a_m - a_n| \leq \varepsilon$
- konvergente Folge → beschränkt
- monoton + beschränkte Folge → konvergent
- konvergente Folge → Grenzwert (genau 1!)

Häufungspunkte: (→ mehrere möglich!)
Folge hat HP x, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen x konvergiert
Limes Superior: größter HP
Limes Inferior: kleinster HP
- Grenzwert ist auch HP (nicht umgekehrt)
- Folge konvergent ⇔ hat genau 1 HP (= Grenzwert)
- Folge beschränkt ⇒ min. 1 HP (d.h. min 1 konv. Teilfolge)

Limes Berechnung
- Binomische Formel ergänzen
- Variable ausklammern
- Umformung: $\sqrt[n]{60n^2} = \sqrt[n]{60} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1 \begin{cases} q \geq 1 & 1 \leq \sqrt[n]{q} \leq \sqrt[n]{n} \to 1 \\ 0 < q < 1 & \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{q} \leq 1 \to 1 \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{n} x^k = n$ (l'H wär einfacher)
- $\sqrt{x^2 + 4} = x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$ (Ausklammern)
- $\lim_{x\to\infty} x^n e^x = \infty \begin{cases} n \geq 0 \to \text{trivial } (\text{„}\infty \cdot \infty\text{"}) \\ n < 0 \to \frac{e^x}{x^{-n}} \overset{l'H}{=} \frac{e^x}{|n|!\,x^0} = \infty \end{cases}$
- $\lim_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$ → wie oben (mehrfach l'H!)
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{ae^x}{c + be^x} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \begin{cases} \infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & 0 \leq \alpha < 1 \end{cases}$
- $\lim_{x\to 0} x^n \cdot \ln(x) = 0$ (~ evtl. unsicher!)

Grenzwert-Abschätzung
- $\infty + \infty = \infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

⚠
$\infty \cdot 0 = ?$ → Umformung x^{-1}
$\infty - \infty = ?$ → gem. Nenner!
$\frac{\infty}{\infty} = ?$, $\frac{0}{0} = ?$ } l'H

REIHEN

(d.h. Folge keine Nullfolge ↔ sicher divergent)

konvergente Reihe → Nullfolge
Leibnitz: alle $a_n \geq 0$; $a_n \geq a_{n+1}$; $\lim_n a_n = 0$
(→ pos., monoton fall. Nullfolge)
→ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent

Wurzel: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ → abs konv., wenn $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$; $q \in (0,1)$
→ div., wenn $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$

Majorant: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ → abs. konv., wenn $|a_k| \leq b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv.

Minorant: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ → div., wenn $a_k > b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ div.

Quotient: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ → abs. konv., wenn $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$; $q \in (0,1)$
→ div., wenn $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$

Wurzel II $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ → abs. konv., wenn $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$
→ div., wenn $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$
⚠ $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ → keine Aussage

- beschränkte Folge × Nullfolge → Grenzwert: 0

Potenzreihe: (Notfalls Substituieren!)
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$
→ $R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}}$ → Potenzreihe konv. für $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < R\}$

⚠ Rand des Konv.-Radius manuell betrachten!
↳ Randpunkte einsetzen → auf bekannte Reihe zurückführen

Reihen
- geom.: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ → konv. ($= \frac{1}{1-q}$), wenn $|q| < 1$; → divergent, wenn $|q| \geq 1$
- harm.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ → div.
- Dirichlet: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ → konv., wenn $r > 1$; → div., wenn $r \leq 1$

$x \in [0;2]$
$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$ $\quad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ Beispiel
→ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0;1] \\ x^2 & x \in [1;2] \end{cases}$

Bsp: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \lim_n \frac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} =$
$= \lim_n \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$
weiter: ε-Krit
$|b_n - b| = |\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - 0| \overset{!}{\leq} \varepsilon$

Bsp: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$ → Quotientenkrit.
→ $\frac{6^n \cdot 6}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{6^n} = \frac{6}{n+1} < 1$
↳ ab $n > 5$

Stetigkeit /

im Punkt x_0 → bel. Folge $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{?}{=} f(\lim_{n\to\infty} x_n)$
Bsp.: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
→ $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot \cos\frac{1}{x_n}) \overset{?}{=} f(0)$

Alternativ:
$f(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$

δ-ε-Charakterisierung → zeigt Stetigkeit in x_0
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D: |x - x_0| \leq \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

Min/Max: kompakt → abgeschlossen & beschränkt
Stetige Fkt nehmen auf kompakten Mengen Max und Min an

Nullstellensatz / Zwischenwertsatz
$f(x_1) < 0$; $f(x_2) > 0$ suchen
(stetig & abgeschlossenes Intervall)
→ Nst-Satz: es existiert eine Nst
→ Zw-Satz: alle Werte zwischen x_1 und x_2 werden angenommen

Stetige Fortsetzbarkeit
Grenzwert a im krit. Punkt x_0 bestimmen
→ Fkt abschnittsweise definieren:
$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für sonst} \\ a & x = x_0 \end{cases}$

Differenzierbarkeit

im Punkt x_0
$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \overset{?}{=} \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(0)}{h}$

Konvergenz von Funktionenfolgen:
pktw. Konvergenz:
$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ → $n_0(\varepsilon, x)$
glm. Konvergenz
wie pktw. Konvergenz, aber: $n_0(\varepsilon)$
oder:
$\lim_{n\to\infty} (\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|) = 0$
$[f(x): \ f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)]$

Umkehrfunktion $D \to W$, $W \to D$; $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$
$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
Bsp: $f(x) = \arcsin(x)$ $\quad f'(x) = ?$
$y = \arcsin(x)$
$x = \sin(y)$
→ $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Leibnitzregel
$[(f \cdot g)^{(n)}](x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$ $\quad [n \in \mathbb{N}]$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Regeln:
Produktregel: $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$
Quotientenregel: $(\frac{Z}{N})' = \frac{NAZ - ZAN}{N^2}$
$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

Diff'barkeit

Mittelwertsatz: $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

stetig & diff'bar $\hookrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Taylor: $\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_*) \frac{(x-x_*)^k}{k!} = T_n^f(x,x_*)$

$f(x_*+h) = f(x_*) + f'(x_*)\cdot h + f''(x_*)\frac{h^2}{2}$

Restglied: $R_n^f(x,x_*) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_*)^{n+1}}{(n+1)!}$

$\xi \in (x, x_*)$

Abschätzung: $|R_n^f(x,x_*)|$

Taylor Konvergenz:

$\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_*) = 0$

$\hookrightarrow$ konvergiert gegen $f(x)$

Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

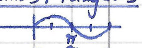
· Folge pktw. konv. } Grenzfkt
Abl. glm. konv. } diff'bar

Riemann: $\underline{S} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\cdot \inf(f(x))$

$x\in[x_{i-1};x_i]$

$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n}(x - x_{i-1})\cdot \sup(f(x))$

Sinus/Cosinus/Tangens

Sin:  $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

cos:  $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad \sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x) \xrightarrow{'} \cos(x)$

$\cos(x) \xrightarrow{'} -\sin(x)$

$\tan(x) \xrightarrow{'} 1+\tan^2(x)$

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \xrightarrow{'} \cosh(x)$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \xrightarrow{'} \sinh(x)$

$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \xrightarrow{'} \mathrm{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

$\arcsin(x) \xrightarrow{'} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \mathrm{arsinh}(x) \xrightarrow{'} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\arccos(x) \xrightarrow{'} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \mathrm{arcosh}(x) \xrightarrow{'} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\arctan(x) \xrightarrow{'} \frac{1}{x^2+1}$ $\quad \mathrm{artanh}(x) \xrightarrow{'} \frac{1}{1-x^2}$

$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

Ableitungen (Sonstige)

$x^n \xrightarrow{'} n x^{n-1}$

$\sqrt{x} \xrightarrow{'} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{1}{x} \xrightarrow{'} -\frac{1}{x^2}$

$e^x \xrightarrow{'} e^x$

$\ln(x) \xrightarrow{'} \frac{1}{x}$

$x^x = \exp(x\cdot\ln(x)) \xrightarrow{'} x^x(\ln(x)+1)$

Integration $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

Partielle Integration

$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$

→ Trick: versuchen auf Originalterm zu kommen

Substitution

$y = bla \rightarrow \frac{dy}{dx} = (bla)'$

$\rightarrow dx = \frac{1}{(bla)'}dy$

⚠ Grenzen anpassen: $\int_a^b$ wobei $y=2x \rightarrow \int_{2a}^{2b}$

Partialbruchzerlegung

$\int \frac{x^2+5x+2}{x^3-x}$

Schritt 1: Nenner aufsplitten

$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$

Schritt 2:

$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{x^2+5x+2}{x^3-x} \quad |\cdot N$

$\rightarrow a(x+1)(x-1) + b(x-1)x + c(x+1)x = x^2+5x+2$

Schritt 3 a,b,c berechnen

Methode 1: Koeff. vergleich

$a(x^2-1) + b(x^2-x) + c(x^2-x) = x^2+5x+2$

$\rightarrow x^2(a+b+c) + x(c-b) - a = x^2+5x+2$

$a+b+c = 1 \rightarrow a = -2$

$c-b = 5 \rightarrow b = -1$

$a = -2 \rightarrow c = 4$

Methode 2: Werte (meist Nst's) einsetzen

$x=0 \rightarrow \ldots \rightarrow a=-2$

$x=1 \rightarrow \ldots \rightarrow c=4$

$x=-1 \rightarrow \ldots \rightarrow b=-1$

Schritt 4:

$\int \frac{x^2+5x+2}{x^3-x} = \int \frac{-2}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{4}{x-1} =$

$= -2\ln|x| - \ln|x+1| + 4\ln|x-1| + c$

$D\setminus\{0,1;-1\}$

2-fach Nst $\rightarrow \frac{Cx+D}{x^2+1}$

Integrale (Sonstige):

- $\int\frac{x^2}{1+x^2} = \int\frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \;\circleddash\; x - \arctan(x) + c$
- $\int x^3\exp(x^2) \rightarrow f = x^2;\ g' = x\exp(x^2)$
- $\int\frac{2x}{(1+x^2)^2} \;\circleddash\; -\frac{1}{x^2+2} + c$
- $\int\frac{2x}{1+x^2} \;\circleddash\; \ln(x^2+2) + c$
- $\int_0^{x_0}\frac{1}{x^\alpha}$ exist. nur für $\alpha < 1$
- $\int_{x_0}^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}$ exist. nur für $\alpha > 1$
- $\int\tan(x) \;\circleddash\; -\ln|\cos(x)|$

Sonstiges $\rightarrow ||a|-|b|| \le |a\pm b| \le |a|+|b|$

- Dreiecksungleichung: $|a+b| \le |a|+|b|$
- $x - x^2 \le \frac{1}{4}$ (Parabel vorstellen!)
- $e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ $\quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$

Log- & Potenzgesetze

$\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^r) = r\cdot\ln(x)$

$\hookrightarrow x^x = \exp(\ln(x^x)) = \exp(x\cdot\ln(x))$

$\ln(\frac{1}{x}) = \ln(x^{-1}) = -\ln(x)$

$\ln(\sqrt[n]{x}) = \ln(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\ln(x)$

$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

$x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ $\quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

$x^{r+s} = x^r\cdot x^s$

$x^{r-s} = \frac{x^r}{x^s}$

$(x\cdot y)^r = x^r\cdot y^r$ $\quad (\frac{x}{y})^r = \frac{x^r}{y^r}$

$(x^r)^s = x^{r\cdot s}$ $\quad$ ⚠ $x^{r^s} = x^{(r^s)} \neq x^{r\cdot s}$

Obere/untere Schranke (Bsp)

$\frac{x^n-y^n}{x-y} = f'(\xi)$ $\quad$ vgl: $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(\xi)$

→ Folgerung: $f(\xi) = \xi^n \rightarrow f'(\xi) = n\xi^{n-1}$

$[x,y\in[0,1] \rightarrow \xi\in(0;1) \rightarrow f'(\xi) \ge 0$ und $\le n$

$\Rightarrow \frac{x^n-y^n}{x-y} \ge 0$ und $\le n$

Häufige Fehler/Tipps

- Nachdiff. vergessen
- Monotonie über $f'(x) \gtrless 0$
- Taylor: Restglied-Abschätzung → Betrag!
- $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{k}} = 1$
- Umformung **VOR** Limes/Abschätzung
- Achtung bei Taylor, wenn $x_* \neq 0$!
- $\lim_{x\to-\infty} e^x\cdot x = „0\cdot(-\infty)" \rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = „\frac{\infty}{\infty}"$ ↳ l'H
- $\lim = „\infty - \infty"$ → gemeinsamer Nenner
- Ableiten: $x^{-x} = \exp(\ln(x^{-x})) = \exp(-x\ln(x))$
  ↳ $-x^{-x}(\ln(x)+1)$
- Grenzwert bei rek. Folge (Annahme: GW existiert)
  Bsp: $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^3}{2}$ GW sei a
  $\rightarrow a = \frac{a+a^3}{2}$ → nach a auflösen
-