Klausur Mathematik für Ingenieure C3, Bachelor **WiSe '16/'17**

Donnerstag, 13.04.2017

Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen)
Wir betrachten die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$:

$$f(x,y) := 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 5\,y^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3}$$

a) Berechnen Sie alle stationären Punkte (=die kritischen Stellen) von f.

b) Bestimmen Sie, welche der stationären Punkte lokale Maximalstellen und welche lokale Minimalstellen sind.
Bemerkung: Es ist *nicht* gefordert, die zugehörigen Extremwerte auszurechnen.

c) Hat f eine *globale* Maximalstelle? ('ja' oder 'nein' reicht, keine Begründung erforderlich)
Zur Erinnerung: Eine Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ heißt globale Maximalstelle von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, falls $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(3+3+1=7 Punkte)

A2) (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen)
Für die auf dem $\mathbb{R}^3$ definierte Funktion

$$f(x, y, z) := x^2 + y$$

finden Sie das Maximum und das Minimum unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,.$$

Hinweis: Vorschlag zum Lösen des Lagrange-Systems: Machen Sie eine Fallunterscheidung, basierend auf einer Ihrer Gleichungen, die die Form "Produkt ist gleich null" hat.

(8 Punkte)

A3) (Fixpunktsatz)
Wir interessieren uns für Lösungen der Gleichung

$$e^{-x} + e^{-x^2} = 4\,x \qquad (*)$$

auf dem Intervall

$$M := [0,1]\,.$$

Dazu bringen wir diese Gleichung auf die Fixpunktform $f(x) = x$ mit

$$f(x) := \frac{1}{4}\,(e^{-x} + e^{-x^2}\,)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall M eine Selbstabbildung ist: $f(M) \subseteq M$

b) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall M eine Kontraktion ist. Geben Sie eine Kontraktionskonstante k an.

c) Wie viele Lösungen hat die Gleichung (*) im Intervall M? (kurze Begründung)

(2+2+1=5 Punkte)

A4) (Differentialgleichungen)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{e^t}{2 + 2y(t)}\,, \quad y(0) = 1\,.$$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) + e^{2t} + e^t \cos t\,.$$

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(t) = A\,\vec{y}(t) \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Zur Kontrolle</u>: Der/Die Eigenwert(e) von A ist/sind ganzzahlig.

(4+3+4=11 Punkte)

**** **** **Bitte wenden** **** ****

A5) (Algebra)

a) Berechnen Sie (falls existent) die Inversen in $(\mathbb{Z}_n, \cdot\,)$. Falls ein Inverses nicht existiert, begründen Sie dies kurz:

$$[5]_{30}\,,\ [3]_{26}\,,\ [1]_7$$

b) (i) Zeigen Sie: Im Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot\,)$ ist $[a]_n$ ist zu $[b]_n$ genau dann invers (bzgl. Multiplikation), wenn $[n-a]_n$ zu $[n-b]_n$ invers ist.

(ii) Verwenden Sie die Aussage von b), um $[996]_{997}^{-1}$ zu berechnen.

c) Wir betrachten die Prüfgleichung

$$\sum_{i=1}^{4} g_i\, d_i \equiv 0 \pmod{25}$$

für den Datensatz $(d_1, d_2, d_3|d_4)$ mit den Gewichten g_1, g_2, g_3, g_4.

(i) Sind bei der Wahl $(g_1, g_2, g_3, g_4) := (8, 1, 2, 1)$ sowohl Einzelfehler als auch <u>Nachbar</u>vertauschungsfehler jeweils sicher erkennbar? (Begründung)

(ii) Geben Sie $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \{1, 2, ..., 24\}$ an, so dass sowohl jeder Einzelfehler als auch jeder beliebige Vertauschungsfehler sicher erkannt wird (mit kurzer Erläuterung).

(3+3+3=9 Punkte)

(Summe: 40 Punkte)