Grundlagen der Logik in der Informatik

Klausur Braindump

Diverse Teilnehmer

Fehler und Verbesserungen via Gitlab melden.

WINTERSEMESTER 18/19

> Logisch zu sein, ist immer bequem.
> Nahezu unmöglich ist es aber,
> logisch bis ans Ende zu sein.
>
> *Der Mythos des Sisyphos*, A. Camus

Aufgabe 1 Aussagenlogische Konsequenz Und Beweise

a) Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten:

   i) $(A \to C) \land (B \to C) \models (A \lor B) \to C$

   ii) $((A \land B) \to C) \land ((\neg A \land \neg B) \to C) \models C$

b) Man betrachte das folgende Beweisskript in Coq:

```
Require Import Classical.

Parameters p q r : Prop.

Theorem Q1: (p -> (p -> (p -> q))) -> (p -> q).
Proof.
intro A.
intro B.
assert (p -> (p -> q)) as C.
apply A; exact B.
assert (p -> q) as D.
apply C; exact B.
```

```
13 apply D.
14 assumption.
15 Qed.
```

Geben Sie für jeden der Schritte 8–14 die Unterziele und Annahmen der Durchführung des Schritts an.

Aufgabe 2 Formalisierung In Prädikatenlogik

In der Klausur war die Aufgabenstellung ausführlicher als hier wiedergegeben. Sollte dennoch inhaltlich gleich sein.

Wir betrachten ein Modell zur Formalisierung von Schachzügen, wobei der Grundbereich die Felder des Bretts sind.

Das Prädikat $W(x)$ sagt aus, dass auf dem Feld x eine weiße Figur, $S(x)$, dass dort eine schwarze Figur steht. Die Prädikate $B(x)$, $Sp(x)$, $L(x)$, $T(x)$, $D(x)$, $K(x)$ sagen jeweils aus, dass die Figur x ein *Bauer*, *Springer*, *Laufer*, *Turm*, *Dame* oder *König* ist. So heißt

$$K(x) \wedge W(x),$$

dass auf Feld x der weiße König steht. Es werden keine Annahmen über die Anzahl der Figuren gemacht.

Die Prädikate $G(x, y)$ und $B(x, y)$ beschreiben die Lage zweier Felder zueinander:

$G(x, y)$ heißt x und y liegen auf einer gemeinsamen horizontalen oder vertikalen Gerade.

$B(x, y)$ heißt die auf x stehende Figur kann auf das Feld y ziehen.

Die Signatur

$$\Sigma = \{B/1, Sp/1, L/1, T/1, D/1, K/1, W/1, S/1, G/2, B/2\}$$

soll dabei explizit **nicht** geändert werden.

Formalisieren Sie hiermit:

a) Eine weiße Dame wird bedroht

b) Schwatz bedroht jede Figur die Schwarze Dame bedroht

c) Türme können nur horizontal/vertial in jeder Richtung laufen

d) Jeder Laufer bedroht einen Springer

Eine Figur wird bedroht, wenn eine andere auf das Feld ziehen kann, wo diese steht. Figuren der selben Farbe bedrohen sich jedoch nicht. Beachten Sie, dass nur ein Zustand des Spiels formalisiert werden soll, nicht der Verlauf des Spiels.

Aufgabe 3 Unifikation

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$f(x, g(h(x), k(z))) \doteq f(h(y), g(z, y))$$

unifizierbar sind, und gegebenenfalls eine mgu berechnen. Dabei sind x, y und z Variable, und f, g, h, k und a Funktionen/Konstanten.

Gefordert sind natürlich nicht nur die letztendliche Antwort, sondern auch die einzelnen gemäß dem Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, mit der Bezeichnung der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe 4 Pradikatenlogische Normalisierung und Resolution

a) Bringen sie die Formel

$$\forall x\, (\exists y\, (P(x, y)) \lor \forall z\, (Q(x, z))) \to \exists y\, (P(x, y) \land R(y))$$

zunächst in pränexe Normalform, sodann in Skolemform und schließlich in Klauselform.

Geben Sie bei den Umformungen ggf. die nötigen Zwischenschritte an

b) Verwenden Sie das prädikatenlogische Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass die aus den Klauseln

$$\{S(x, f(x))\}$$
$$\{\neg S(x, y), \neg S(y, z), R(x, z)\}$$
$$\{\neg P(x), \neg R(x, y), P(y)\}$$
$$\{P(a)\}$$
$$\{\neg P(f(f(a)))$$

bestehende Klauselform unerfüllbar ist. In der Klauselform sind x, y, z Variablen und a eine Konstante.

Aufgabe 5 Formale Deduktion in Prädikatenlogik erster Stufe

Geben Sie eine formale Herleitung mittels natürlicher Deduktion für die Formel

$$\forall x\, \forall y\, (R(x, y) \to P(y))$$

unter den Annahmen

$$\forall x\, \forall y\, (S(x, y) \to P(y))$$
$$\forall x\, \forall y\, (R(x, y) \to \exists z\, (S(z, y)))$$

Aufgabe 6 Induktion

Die Klausur meinte die Aufgabe sei “absichtlich Einfach”, und das dafür mehr Wert auf Formalismen gelegt wurde.

Σ sei die Signatur $[xor/2]$ und sei das Σ-Modell, in dem M die Menge $\{\top, \bot\}$ der binären Wahrheitswerte ist und für alle $m, n \in M$:

$$\mathfrak{M}[\![xor]\!](m,n) = m \oplus n = \begin{cases} \bot & \text{falls } m = n \\ \top & \text{sonst} \end{cases}$$

Für einen Term E und eine Umgebung η definieren wir die Anzahl $t_\eta(E)$ der Vorkommen von Variablen mit Wert $\top$ (unter η) in E rekursiv durch:

$$t_\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \eta(x) = \top \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad t_\eta(xor(E,D)) = t_\eta(E) + t_\eta(D)$$

Zeigen Sie durch Induktion über E, dass genau dann

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \bot$$

gilt, wenn $t_\eta(E)$ gerade ist.