Braindump Gloin Klausur WS19/20

am 12.06.2020

Aufgabe 1: Wahrheitstafeln und Coq

a) Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten. Bei einem Widerspruch muss die Wahrheitstafel nicht komplett ausgefüllt werden, es genügt, die Belegungen zu benennen.

i) $A \rightarrow (B \vee C) \vDash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$

ii) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg A) \vDash \neg B$

b) Man betrachte das folgende Beweisskript in Coq:

```
1   Require Import Classical.
2
3   Parameters p q r : Prop.
4
5   Theorem Q1: ((p ∧ q) → (¬p ∧ q)) → (p → ¬q).
6   Proof.
7   intro A.
8   intro B.
9   intro C.
10  assert (¬p ∧ q) as D.
11  apply A.
12  split.
13  exact B.
14  exact C.
15  assert (¬p) as E.
16  destruct D as [D _]; exact D.
17  contradiction.
18  Qed.
```

Geben Sie für jeden der Schritte 5–16 die Unterziele und Annahmen der Durchführung des Schritts an.

Aufgabe 2: Formalisierung

Gegeben: P(x), S(x), K(x), I(x, y)
P(x): Ist x ein Punkt
S(x): Ist x eine Strecke
K(x): Ist x ein Körper
I(x, y): Ist x in y enthalten (Punkt auf Strecke, Punkt in Körper, Strecke in Körper)

Zur Erinnerung: Ein Körper ist konvex, wenn die Strecke zwischen zwei Punkten im Gebiet liegt.
Hinweis: I(x, s) mit einem Punkt x und einer Strecke s bedeutet **nicht**, dass x einer der Endpunkte ist!
Für die folgenden Teilaufgaben dürfen nur die oben beschriebenen Funktionen verwendet werden. Es ist allerdings erlaubt, Zwischenformeln zu verwenden, um Lösungen von vorherigen Teilaufgaben verwenden zu können (das macht besonders bei Teilaufgabe a) Sinn).
Formalisieren Sie hiermit:

a) Der Körper x ist (im oben definierten Sinn) konvex.

b) Wenn ein Körper der Durchschnitt zweier konvexer Körper ist, dann ist er wieder konvex.

c) Die Punkte x und y sind die beiden Endpunkte der Strecke z.
Hinweis: Eine Strecke, die die Punkte x und y enthält, enthält mindestens alle Punkte, die z enthält.

d) Je 2 Punkte liegen stets auf einer gemeinsamen Strecke.

Aufgabe 3: Unifikation

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$f(k(x, g(y)), h(x)) = f(k(g(z), g(z)), y)$$

unifizierbar sind, und gegegebenfalls die mgu zu berechnen. Dabei sind x, y und z Variablen und f, g, h und k Funktionen.
Gefordert sind natürlich nicht nur die letztendliche Antwort mit mgu, sondern auch die einzelnen gemäß dem Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, mit der Bezeichnung der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe 4: Normalisierung und Resolution

a) Bringen Sie die Formel

$$\exists z(\exists y(\forall z(P(y,z))) \rightarrow \forall x(Q(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge P(x,y,z))))$$

zunächst in die pränexe Normalform, anschließend in die Skolemform und zum Schluss in die Skolemform mit CNF (ohne Quantoren). Geben Sie bei den Umformungen gegebenenfalls die nötigen Zwischenschritte an.
Die Umformung in die Klauselform kann aufgrund von Zeitgründen weggelassen werden.

b) Zeigen Sie durch Verwendung des in der Vorlesung behandelten prädikatenlogischen Resolutionsverfahrens, dass die im Folgenden beschriebene Klauselmenge (nicht ihre Negation!) unerfüllbar ist:

$$\begin{gathered}\{\neg R(x,y), \neg R(x,z), R(y,z)\} \\ \{R(x,x)\} \\ \{R(x,f(x))\} \\ \{P(f(x))\} \\ \{\neg R(x,a) \wedge \neg P(x)\}\end{gathered}$$

In der Klauselform sind x, y und z Variablen und a eine Konstante.

Aufgabe 5: Deduktion mit Fitch

Geben Sie eine formale Herleitung mittels natürlicher Deduktion für die Formel

$$\forall x \exists y (R(y,x) \wedge P(y))$$

unter den Annahmen

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(x,z)) \to R(y,z)) \\ \forall x (R(x,x)) \\ \forall x \exists y (R(x,y) \wedge p(y))\end{gathered}$$

an.

Aufgabe 6: Induktion

$\sum$ sei die Signatur $[xor/2, false/0, true/0]$ und sei das $\sum$-Modell, in dem M die Menge $\{\perp, \top\}$ der binären Wahrheitswerte ist. Es gilt $\mathfrak{M}[\![false]\!] = \perp$ und $\mathfrak{M}[\![true]\!] = \top$ und für alle $x, y \in M$:

$$\mathfrak{M}[\![xor]\!](x,y) = x \oplus y = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = y \\ \top & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie die rekursive Definition von f auf geschlossenen Termen an (zur Erinnerung: ein Term E ist geschlossen, wenn $FV(E) = \emptyset$), so dass f(E) die Anzahl der Vorkommen der Konstante $true$ im geschlossenen Term E liefert.

Zeigen Sie außerdem, dass für den geschlossenen Term E genau dann

$$\mathfrak{M}[\![E]\!] = \perp$$

gilt, wenn f(E) gerade ist.

Die Aufgabe ist absichtlich einfacher gestellt, dafür wird mehr Wert auf Formalismen gelegt.