Auszüge aus dem Stuve Pad Grundlagen der Logik in der Informatik (GLoIn)

Autor: Ködel Nils

11. August 2023

Dies ist eine formatierte Version des Stuve Pads des Moduls Grundlagen der Logik in der Informatik an der FAU. Das Stuve Pad ist auf der Seite der FSI-Informatik unter dem Link `https://fsi.cs.fau.de/pruefungen/bachelor` erreichbar. Die Lösungen wurden von dort übernommen und teils verbessert und ergänzt. Keine Garantie für die Richtigkeit der gezeigten Lösungen und Inhalte. Die Verwendung zum Üben und in Klausuren/Prüfungen ist vollständig auf eigene Gefahr.

In der Prüfung sind Kapitel 1 und 2 eine Aufgabe, genauso wie 5 und 6. Diese Teilaufgaben (in der Prüfung) hängen normalerweise nicht direkt zusammen, deshalb sind diese hier getrennt aufgeführt. Eine Erklärung der Aufgabentypen findet sich im Stuve Pad, sowie weitere Materialen auf der Seite der FSI. Kursive Teile sind eigene Anmerkungen. Die Anmerkungen für die Induktionsaufgaben sind nur zum groben Verständnis der eigentlichen Aussage, aber viel zu ungenau.

Viel Erfolg in der Prüfung :)

1 Wahrheitstafeln

Zum Ausfüllen $\models$ durch $\rightarrow$ ersetzen!

1.a WS 20/21

1.a.1 $(A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (B \rightarrow \neg A) \models A \rightarrow C$

A	B	C	$B \vee C$	$A \rightarrow (B \vee C)$	$\neg A$	$B \rightarrow \neg A$	$links$	$A \rightarrow C$	$links \models A \rightarrow C$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1

Letzte Spalte für jede Belegung erfüllt $\rightarrow$ Konsequenz gilt.

1.a.2 $(A \rightarrow B) \wedge ((B \wedge A) \rightarrow \neg C) \models \neg(A \rightarrow C)$

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \wedge A$	$(B \wedge A) \rightarrow \neg C$	$links$	$A \rightarrow C$	$\neg(A \rightarrow C)$	$links \models \neg(A \rightarrow C)$
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1

Letzte Spalte nicht für jede Belegung erfüllt $\rightarrow$ Konsequenz gilt nicht.

1.b WS 18/19

1.b.1 $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \models (A \vee B) \rightarrow C$

A	B	C	$A \rightarrow C$	$B \rightarrow C$	$links$	$A \vee B$	$A \vee B \rightarrow C$	$links \models rechts$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Letzte Spalte für jede Belegung erfüllt → Konsequenz gilt.

1.b.2 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \rightarrow C) \models C$

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow C$	$links$	$links \models C$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

Letzte Spalte nicht für jede Belegung erfüllt → Konsequenz gilt nicht.

2 Coq

2.a WS 20/21

```
Require Import Classical.

Parameters p q r : Prop.
Theorem Q1 : ((p -> (q \/ r)) /\ (~p \/ ~q)) -> (~r -> ~p).
Proof.
intro A.
intro B.
intro C.
destruct A as [D E].
destruct E as [G|H].
contradiction.
```

```
12 assert (q \/ r) as F.
13 apply D.
14 exact C.
15 destruct F as [I|J].
16 contradiction.
17 contradiction.
18 Qed.
```

Geben Sie für jeden der Schritte 7-17 das jeweils aktuelle Unterziel (subgoal) und Annahmen samt Labels jeweils nach Durchführung des Schritts an.

Schritt	Annahmen	Aktuelles Unterziel
5	—	((p -> (q ∨ r)) ∧ (~p ∨ ~q)) -> (~r -> ~p)
6	A : ((p -> (q ∨ r)) ∧ (~p ∨ ~q))	~r -> ~p
7	A, B :~r	~p
8	A, B, C: p	False
9	B, C, D: p -> (q ∨ r), E: ~p ∨ ~q	False
10	B, C, D, G: ~p	False
11	B, C, D, H: ~q	False
12	B, C, D, H	q ∨ r
13	B, C, D, H	p
14	B, C, D, H, F: q ∨ r	False
15	B, C, D, H, I: q	False
16	B, C, D, H, J: r	False
17	No more subgoals	

2.b WS 18/19

```
Require Import Classical.

Parameters p q r : Prop.

Theorem Q1: (p -> (p -> (p -> q))) -> (p -> q).
Proof.
intro A.
intro B.
assert (p -> (p -> q)) as C.
apply A; exact B.
assert (p -> q) as D.
apply C; exact B.
apply D.
assumption.
Qed
```

Geben Sie für jeden der Schritte 6-14 die Unterziele und Annahmen der Durchführung des Schritts an.

Schritt	Annahmen	Aktuelles Unterziel
6	—	(p -> (p -> (p -> q))) -> (p -> q)
7	A: p -> (p -> (p -> q))	p->q
8	A, B: p	q
9	A, B	(p -> (p -> q))
10	A, B, C: (p -> (p -> q))	q
11	A, B, C	p -> q
12	A, B, C, D: p -> q	q
13	A, B, C, D	p
14	A, B, C, D	No more subgoals

3 Formalisierung in Prädikatenlogik

3.a WS 20/21

Gegeben: P(x) (x ist ein Punkt), G(x) (x ist eine Gerade), I(x,y) (Inzidenz - x ist ein Punkt auf der Geraden y)

3.a.1 Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es höchstens eine durch diese Punkte führende Gerade

$\forall a \forall b \exists g \exists k.(\neg(a = b) \wedge I(a, g) \wedge I(a, k) \wedge I(b, g) \wedge I(b, k)) \rightarrow (g = k)$

3.a.2 x und y sind (echt) parallele Geraden

$Par(x, y) := G(x) \wedge G(y) \wedge \neg\exists p.(I(p, x) \wedge I(p, y))$

3.a.3 Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es einen dritten Punkt, so dass die resultierenden drei Punkte nicht kolinear sind

$\forall a \forall b.((P(a) \wedge P(b) \wedge \neg(a = b)) \rightarrow \exists c.P(c) \wedge \forall g.(G(g) \wedge I(a, g) \wedge I(b, g) \rightarrow \neg I(c, g)))$

3.a.4 Zu jeder Geraden gibt es durch jeden nicht auf ihr liegenden Punkt eine parallele Gerade

$\forall g \forall p.(G(g) \wedge P(p) \wedge \neg I(p, g) \rightarrow \exists k(G(k) \wedge I(p, k) \wedge Par(g, k)))$

3.a.5 Je zwei nicht parallele Geraden haben genau einen gemeinsamen Punkt

$\forall g \forall k.(G(g) \wedge G(k) \wedge \neg Par(g, k) \rightarrow \exists p.(P(p) \wedge I(p, g) \wedge I(p, k) \wedge \forall q.(P(q) \wedge I(q, g) \wedge I(q, k) \rightarrow p = q)))$

3.b WS 19/20

Gegeben: $P(x), S(x), K(x), I(x, y)$

- $P(x)$: Ist x ein Punkt
- $S(x)$: Ist x eine Strecke
- $K(x)$: Ist x ein Körper
- $I(x, y)$: Ist x in y enthalten (Punkt auf Strecke, Punkt in Körper, Strecke in Körper)

Zur Erinnerung: Ein Körper ist konvex, wenn die Strecke zwischen zwei Punkten im Gebiet liegt.
Hinweis: $I(x, s)$ mit einem Punkt x und einer Strecke s bedeutet nicht, dass x einer der Endpunkte ist!
Für die folgenden Teilaufgaben dürfen nur die oben beschriebenen Funktionen verwendet werden. Es ist allerdings erlaubt, Zwischenformeln zu verwenden, um Lösungen von vorherigen Teilaufgaben verwenden zu können (das macht besonders bei Teilaufgabe a) Sinn). Formalisieren Sie hiermit:

3.b.1 Der Körper x ist (im oben definierten Sinn) konvex

$istKonvex(k) := \forall a, b.\ P(a) \wedge P(b) \wedge \neg(a = b) \wedge I(a, k) \wedge I(b, k) \rightarrow \exists s.\ S(s) \wedge I(a, s) \wedge I(b, s) \wedge I(s, k)$

3.b.2 Wenn ein Körper der Durchschnitt zweier konvexer Körper ist, dann ist er wieder konvex

$\forall k, x, y.\ K(k) \wedge K(x) \wedge K(y) \wedge istKonvex(x) \wedge istKonvex(y) \wedge (\forall p.\ P(p) \wedge I(p, k) \rightarrow I(p, x) \wedge I(p, y)) \rightarrow istKonvex(k)$

3.b.3 Die Punkte x und y sind die beiden Endpunkte der Strecke z

Hinweis: Eine Strecke, die die Punkte x und y enthält, enthält mindestens alle Punkte, die z enthält.

$sindEndpunkte(x, y, z) := I(x, z) \wedge I(y, z) \wedge \neg(\exists s.\ S(s) \wedge I(x, s) \wedge I(y, s) \wedge \neg(s = z) \wedge (\forall p.\ P(p) \wedge I(p, s) \rightarrow I(p, z))$

3.b.4 Je 2 Punkte liegen stets auf einer gemeinsamen Strecke

$\forall x, y.\ P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y) \rightarrow \exists s.\ S(s) \wedge I(x, s) \wedge I(y, s)$

3.c WS 18/19

Aufgabenstellung: Modell zur Formalisierung von Schachzügen mit Grundbereich Schachbrett.

$W(x)$	Auf Feld x ist weiße Figur
$S(x)$	Auf Feld x ist schwarze Figur
$B(x)$	x ist Bauer
$Sp(x)$	x ist Springer
$L(x)$	x ist Laufer
$T(x)$	x ist Turm
$D(x)$	x ist Dame
$K(x)$	x ist König
$G(x,y)$	x und y liegen auf gemeinsamen horizontalen oder vertikalen Gerade
$B(x,y)$	Figur auf x kann auf y ziehen

3.c.1 Eine weiße Dame wird bedroht

$\exists d.(W(d) \land D(d) \land \exists a.(S(a) \land B(a,d)))$

3.c.2 Schwarz bedroht jede Figur die schwarze Dame bedroht (Steht so im Braindump, Sinn?)

$\forall f.((W(f) \land \exists d.(S(d) \land D(d) \land B(f,d))) \to (\exists g.(S(g) \land B(g,f)))$

3.c.3 Türme können nur horizontal/vertial in jeder Richtung laufen

$\forall a,b.((T(a) \land B(a,b)) \to G(a,b))$

3.c.4 Jeder Laufer bedroht einen Springer

$\forall l.(L(l) \to (\exists s(Sp(s) \land (((S(s) \land W(l)) \lor (W(s) \land S(l))) \land B(l,s))))$

3.d WS 17/18

$P(x)$	x ist Punkt
$G(g)$	g ist Gerade
$K(k)$	k ist Kreis
$m(k)$	gibt Mittelpunkt des Kreises zurück
$I(p,x)$	p liegt auf Gerade (auf Kreis) x

3.d.1 Zwei Kreise sind gleich wenn dieselben Punkte laut Inzidenzrelation darauf liegen

$\forall x,y((K(x) \land K(y) \land \forall p(P(p) \land (I(p,x) \leftrightarrow I(p,y))) \to (x=y))$

3.d.2 Zwei Kreise mit dem gleichen Mitttelpunkt sind gleich oder haben keine gemeinsamen Punkte

$\forall x, y((K(x) \wedge K(y) \wedge (m(x) = m(y))) \rightarrow ((x = y) \vee \forall p(P(p) \rightarrow \neg(I(p, x) \wedge I(p, y)))))$

3.d.3 Je drei Punkte liegen stets auf einer gemeinsamen Geraden oder auf einem gemeinsamen Kreis

$\forall a, b, c((P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \rightarrow \exists x((K(x) \vee G(x)) \wedge I(a, x) \wedge I(b, x) \wedge I(c, x)))$

3.d.4 Je zwei Kreise haben stets höchstens zwei gemeinsame Punkte oder sind gleich

$\forall x, y((K(x) \wedge K(y)) \rightarrow ((x = y) \vee \neg\exists a, b, c(\neg(a = b) \wedge \neg(a = c) \wedge \neg(b = c) \wedge P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge I(a, x) \wedge I(a, y) \wedge I(b, x) \wedge I(b, y) \wedge I(c, x) \wedge I(c, y)))))$

3.d.5 Zu jedem Kreis gibt es eine Gerade, die ihn in zwei verschiedenen Punkten schneidet

$\forall k(K(k) \rightarrow \exists g(G(g) \wedge \exists p1, p2(P(p1) \wedge P(p2) \wedge I(p1, g) \wedge I(p2, g) \wedge I(p1, k) \wedge I(p2, k) \wedge \neg(p1 = p2))))$

3.e WS 16/17

$zwei() = +(1, 1)$
$groesser(x, y) = \exists n((y + n = x) \wedge \neg(n = 0))$
$gerade(x) = teilt(zwei(), x)$

3.e.1 x ist Teiler von y

$teilt(x, y) = \exists n.((n * x) = y) \wedge \neg(x = 0)$

3.e.2 x ist prim. 1 ist per Konvention nicht prim

$isPrim(x) = \neg(x = 1)) \wedge \neg\exists n.(teilt(n, x) \wedge \neg(n = 1) \wedge \neg(n = x))$

3.e.3 Es gibt keine größte Primzahl

$\forall x.(isPrim(x) \rightarrow \exists z(isPrim(z) \wedge groesser(z, x)))$

3.e.4 Jede gerade Zahl groesser als 2 ist die Summe zweier Primzahlen

$\forall x.((groesser(x, zwei()) \wedge gerade(x)) \rightarrow (\exists a, b.((x = a + b) \wedge isPrim(a) \wedge isPrim(b))))$

3.e.5 x ist eine Primzahlpotenz

$isPP(x) = (x = 1) \lor \exists p.(istPrim(p) \land teilt(p, x) \land \forall q.((istPrim(q) \land teilt(q, x)) \to p = q))$ in Worten: es existiert eine Primzahl p, die x teilt, und für alle weiteren Primzahlen q, die ebenfalls x teilen, muss gelten, dass p = q ist. Damit gibt es exakt eine Primzahl, die die Zahl x teilt (es gibt noch weitere Zahlen, die x teilen, aber nur exakt eine Primzahl, und das ist glaube ich genau die Eigenschaft, von der in der Aufgabenstellung die Rede ist). Den Fall x = 1 darf man nicht vergessen, da k explizit auch 0 sein darf, und 1 keine Primzahl ist, der hintere Teil des Ausdrucks würde also nicht funktionieren für x = 1. wobei teilt(p,x) bedeutet, dass p die Zahl x teilt.

3.f WS 15/16

Konvex: Strecke zwischen zwei Punkten ist im Gebiet.

$G(g)$	g ist Gebiet
$P(p)$	p ist Punkt
$S(s)$	s ist Strecke
$I(a, b)$	a in b enthalten

3.f.1 Jedes Gebiet ist konvex

$\forall x(G(x) \to ((\forall y \forall z(p(y) \land p(z) \land I(y, x) \land I(z, x)) \to \exists v((s(v) \land I(y, v) \land I(z, v) \land I(v, x)))))$

3.f.2 Der Durchschnitt zweier Gebiete ist wieder ein Gebiet

$\forall x, y, z.G(x) \land G(y) \land G(z) : ((\forall p.P(p) \land I(x, p) \land I(y, p)) \land ((\forall r : P(r) \land \neg I(x, p) \land \neg I(y, p))) \to I(z, p) \land \neg I(z, r))$

3.f.3 Jedes Gebiet besteht aus höchstens einem Punkt oder mindestens dreien

$\forall g(G(g) \to (\neg \exists p(P(p) \land I(p, g)) \lor (\exists p(P(p) \land \forall q(P(q) \land I(q, g) \to p = q)) \lor (\exists a(P(a) \land I(a, x)) \land \exists b(P(b) \land I(b, x)) \land \exists c(P(c) \land I(c, x)) \land \neg(a = b) \land \neg(a = c) \land \neg(b = c)))$

3.f.4 Je zwei Punkte liegen auf einer gemeinsamen Strecke

$\forall s(S(s) \to \exists a, b(P(a) \land P(b) \land \neg(a = b) \land I(a, s) \land I(b, s)))$

3.g WS 14/15

Erlaubte Symbole, Konstanten, etc: $0, 1, +, *, \geq$, Prädikat $istNat(n)$, das angibt, ob n eine natürliche Zahl ist. Es wurde ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es hilfreich sein könnte eigene Abkürzungen für Ausdrücke wie k *teilt* n zu definieren.

3.g.1 n ist eine Primzahl (Natürliche Zahlen), siehe WS 16/17

$teilt(a, b) := istNat(a) \wedge istNat(b) \wedge (\exists x.\ istNat(x) \wedge (a = x * b))$
$istPrim(n) := \forall k.\ teilt(k, n) \to (k = n) \vee (k = 1)$

3.g.2 Zu jeder Zahl gibt es eine mindestens ebenso große natürliche Zahl (Reelle Zahlen)

$\forall x.\ \exists y.\ istNat(y) \wedge y \geq x$

3.g.3 Es gibt eine positive Zahl ohne Quadratwurzel (Rationale Zahlen)

$istRat(n) := \exists p, q.\ istNat(p) \wedge istNat(q) \wedge (n * q = p)$
(Die Formel für die rat. Zahlen $n = \frac{p}{q}$ umgestellt)
$\exists x.\ x \geq 0 \wedge \neg (x = 0) \wedge (\forall y.\ isRat(y) \to y * y = x)$

3.g.4 Quadratwurzel von 2 ist irrational (Reele Zahlen)

$\forall x.\ x * x = 1 + 1 \to \neg istRat(x)$

3.g.5 Summe und Produkt zweier rationaler Zahlen sind wieder rational (Rationale Zahlen)

$\forall x, y.\ istRat(x) \wedge istRat(y) \to istRat(x + y) \wedge isRat(x * y)$

4 Unifikation

4.a WS 20/21

$g(u, g(y, g(z, w))) \doteq g(y, g(f(x), u))$

$decomp$

$\{u \doteq y; g(y, g(z, w)) \doteq g(f(x), u)\}$

$decomp$

$\{u \doteq y; y \doteq f(x); g(z, w) \doteq u\}$

$elim, y$

$\{u \doteq f(x); y \doteq f(x); g(z, w) \doteq u\}$

$elim, u$

$\{u \doteq f(x); y \doteq f(x); g(z, w) \doteq f(x)\}$

$conflict$

$\perp$

4.b WS 19/20

$\{f(k(x, g(y)), h(x)) \doteq f(k(g(z), g(z)), y)\}$

$decomp$

$\{k(x, g(y)) \doteq k(g(z), g(z)); h(x) \doteq y\}$

$decomp$

$\{x \doteq g(z); g(y) \doteq g(z); h(x) \doteq y\}$

$decomp$

$\{x \doteq g(z); y \doteq z; h(x) \doteq y\}$

$orient$

$\{x \doteq g(z); y \doteq z; y \doteq h(x)\}$

$elim, mitte$

$\{x \doteq g(z); y \doteq z; z \doteq h(x)\}$

$elim, rechts$

$\{x \doteq g(h(x)); y \doteq z; z \doteq h(x)\}$

$occurs$

$\perp$

4.c WS 18/19

$f(x, g(h(x), k(z)) \doteq f(h(y), g(z, y)))$

decomp

$\{x \doteq h(y); g(h(x), k(z)) \doteq g(z, y)\}$

decomp

$\{x \doteq h(y); h(x) \doteq z; k(z) \doteq y\}$

orient, mitte; orient, rechts

$\{x \doteq h(y), z \doteq h(x), y \doteq k(z)\}$

elim, rechts

$\{x \doteq h(k(z)), z \doteq h(x), y \doteq k(z)\}$

elim, links

$\{x \doteq h(k(z)), z \doteq h(h(k(z))), y \doteq k(z)\}$

occurs

$\perp$

4.d WS 17/18

$f(h(x, g(z)), y) \doteq f(h(g(y), y), g(h(w, w))$

decomp

$\{h(x, g(z)) \doteq h(g(y), y); y \doteq g(h(w, w))\}$

decomp

$\{x \doteq g(y); g(z) \doteq y; y \doteq g(h(w, w))\}$

orient

$\{x \doteq g(y); y \doteq g(z); y \doteq g(h(w, w))\}$

elim

$\{x \doteq g(y); g(h(w, w)) \doteq g(z); y \doteq g(h(w, w))\}$

decomp

$\{x \doteq g(y); h(w, w) \doteq z; y \doteq g(h(w, w))\}$

orient

$\{x \doteq g(y); z \doteq h(w, w); y \doteq g(h(w, w))\}$

elim

$\{x \doteq g(g(h(w, w))); y \doteq g(h(w, w)); z \doteq h(w, w)\}$

$mgu = [g(g(h(w, w)))/x; g(h(w, w))/y; h(w, w)/z]$

4.e WS 16/17

$g(f(z), h(z), f(y)) \doteq g(f(h(x)), h(y), f(f(x)))$

$decomp$
$\{f(z) \doteq f(h(x)); h(z) \doteq h(y); f(y) \doteq f(f(x))\}$
$decomp, links$
$\{z \doteq h(x); h(z) \doteq h(y); f(y) \doteq f(f(x))\}$
$decomp, mitte$
$\{z \doteq h(x); z \doteq y; f(y) \doteq f(f(x))\}$
$decomp, rechts$
$\{z \doteq h(x); z \doteq y; y \doteq f(x)\}$
$elim, rechts$
$\{z \doteq h(x); z \doteq f(x); y \doteq f(x)\}$
$elim, links$
$\{z \doteq h(x); h(x) \doteq f(x); y \doteq f(x)\}$
$conflict, mitte$
$\perp$

4.f WS 15/16

$f(h(z), g(x), w) \doteq f(w, z, h(h(x)))$

$decomp$
$\{h(z) \doteq w; g(x) \doteq z; w \doteq h(h(x))\}$
$orient$
$\{w \doteq h(z); z \doteq g(x); w \doteq h(h(x))\}$
$elim$
$\{w \doteq h(z); z \doteq g(x); h(z) \doteq h(h(x))\}$
$decomp$
$\{w \doteq h(z); z \doteq g(x); z \doteq h(x)\}$
$elim$
$\{w \doteq h(z); z \doteq g(x); g(x) \doteq h(x)\}$
$conflict$
$\perp$

4.g WS 14/15

$f(g(x, h(z)), z) \doteq f(g(h(z), h(z)), h(w))$

$decomp$
$\{g(x, h(z)) \doteq g(h(z), h(z)); z \doteq h(w)\}$
$decomp(links)$
$\{x \doteq h(z); h(z) \doteq h(z); z \doteq h(w)\}$
$decomp(mitte)$
$\{x \doteq h(z); z \doteq z; z \doteq h(w)\}$
$delete(mitte)$
$\{x \doteq h(z); z \doteq h(w)\}$
$elim(rechts)$
$\{x \doteq h(h(w)); z \doteq h(w)\}$

$mgu = [h(h(w))/x; h(w)/z]$

4.h WS 14/15 (2)

$\{f(g(y), z, h(x)) \doteq f(g(z), x, h(g(y))\}$

$decomp$
$\{g(y) \doteq g(z), z \doteq x, h(x) \doteq h(g(y))\}$
$decomp, decomp$
$\{y \doteq z, z \doteq x, x \doteq g(y)\}$
$elim$
$\{y \doteq z, z \doteq g(y), x \doteq g(y)\}$
$elim$
$\{y \doteq z, z \doteq g(z), x \doteq g(z)\}$
$occurs$
$\perp$

4.i WS 13/14

$f(g(x, h(z)), z) \doteq f(g(h(z), h(z)), h(x))$

decomp
$\{g(x, h(z)) \doteq g(h(z), h(z)); z \doteq h(x)\}$
decomp
$\{x \doteq h(z); h(z) \doteq h(z), z \doteq h(x)\}$
decomp
$\{x \doteq h(z); z \doteq z; z \doteq h(x)\}$
delete
$\{x \doteq h(z); z \doteq h(x)\}$
elim
$\{x \doteq h(h(x)); z \doteq h(x)\}$
occurs
$\perp$

4.j SS 13

$f(g(x, h(z)), z) \doteq f(g(h(z), h(z)), h(w))$

decomp
$\{g(x, h(z)) \doteq g(h(z), h(z)); z \doteq h(w)\}$
decomp
$\{x \doteq h(z); h(z) \doteq h(z); z \doteq h(w)\}$
decomp
$\{x \doteq h(z); z \doteq z; z \doteq h(w)\}$
delete
$\{x \doteq h(z); z \doteq h(w)\}$
elim
$\{x \doteq h(h(w)); z \doteq h(w)\}$

$mgu = [h(h(w))/x; h(w)/z]$

4.k WS 12/13

$f(g(y), x, y) \doteq f(g(z), g(z), x)$

decomp
$\{g(y) \doteq g(z); x \doteq g(z); y \doteq x\}$
decomp
$\{y \doteq z; x \doteq g(z); y \doteq x\}$
elim
$\{y \doteq z, x \doteq g(z), y \doteq g(z)\}$
elim
$\{g(z) \doteq z, x \doteq g(z), y \doteq g(z)\}$
orient
$\{z \doteq g(z), x \doteq g(z), y \doteq g(z)\}$
occurs
$\perp$

5 Resolution - umwandeln in Klauselform

5.a WS 20/21

$$\forall x(\exists y(Q(x,y)) \to \exists z(R(x,z) \wedge \forall x(P(x,z))))$$

NNF + Umbenennung des rechten x in w

$$\begin{aligned}
&\forall x(\exists y(Q(x,y)) \to \exists z(R(x,z) \wedge \forall w(P(w,z))))\\
=&\forall x(\neg\exists y(Q(x,y)) \vee \exists z(R(x,z) \wedge \forall w(P(w,z))))\\
=&\forall x(\forall y(\neg Q(x,y)) \vee \exists z(R(x,z) \wedge \forall w(P(w,z))))
\end{aligned}$$

Pränexe Normalform

$$\begin{aligned}
=&\forall x(\forall y(\neg Q(x,y)) \vee \exists z(\forall w(R(x,z) \wedge P(w,z))))\\
=&\forall x(\exists z(\forall y(\neg Q(x,y)) \vee \forall w(R(x,z) \wedge P(w,z))))\\
=&\forall x\exists z\forall y\forall w(\neg Q(x,y) \vee R(x,z) \wedge P(w,z))
\end{aligned}$$

Skolemform $[f(x)/z]$

$$=\forall x\forall y\forall w(\neg Q(x,y) \vee R(x,f(x)) \wedge P(w,f(x)))$$

Klauselform

$$\{\neg Q(x,y); R(x,f(x))\}; \{P(w,f(x))\}$$

5.b WS 19/20

$$\exists z.(\exists y.\forall z.P(y,z)) \to (\forall x.Q(x) \to \exists y.Q(y) \wedge P(x,y,z))$$

Umbennenung mittleres z zu z' und rechtes y zu y':

$$\exists z.(\exists y.\forall z'.P(y,z')) \to (\forall x.Q(x) \to \exists y'.Q(y') \wedge P(x,y',z))$$

Implikation durch Oder darstellen

$$\exists z.\neg(\exists y.\forall z'.P(y,z')) \vee (\forall x.\neg Q(x) \vee \exists y'.Q(y') \wedge P(x,y',z))$$

$$\exists z.(\forall y.\neg\forall z'.P(y,z')) \vee (\forall x.\neg Q(x) \vee \exists y'.Q(y') \wedge P(x,y',z))$$

NNF

$$\exists z.(\forall y.\exists z'.\neg P(y,z')) \vee (\forall x.\neg Q(x) \vee \exists y'.Q(y') \wedge P(x,y',z))$$

PNF

$$\exists z.\forall y.\exists z'.\forall x.\exists y'.\neg P(y,z') \vee (\neg Q(x) \vee (Q(y') \wedge P(x,y',z)))$$

Skolemform: $[a/z\ ;f(y)/z'\ ;g(y,x)/y']$

$$\forall y.\forall x.\neg P(y,f(y)) \vee \neg Q(x) \vee Q(g(y,x)) \vee (Q(g(y,x) \wedge P(x,g(y,x),a))$$

5.c WS 18/19

$$\forall x((\exists y(P(x,y)) \vee \forall z(Q(x,z))) \to \exists y(P(x,y) \wedge R(y)))$$

NNF

$$\begin{aligned}
&=\forall x(\neg((\exists y(P(x,y)) \vee \forall z(Q(x,z)))) \vee \exists y(P(x,y) \wedge R(y)))\\
&=\forall x((\neg\exists y(P(x,y)) \wedge \neg\forall z(Q(x,z))) \vee \exists y(P(x,y) \wedge R(y)))\\
&=\forall x((\forall y(\neg P(x,y)) \wedge \exists z(\neg Q(x,z)) \vee \exists y(P(x,y) \wedge R(y)))
\end{aligned}$$

Pränexe Normalform

Hier kann man die Quantoren vertauschen, da der 2. Allquantor nur $\neg P(x,y)$ einschließt, man diesem Teil also mit Allquantor klammern kann und dann die Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$ nutzen kann

$$= \forall x.\exists y2.\exists z.\forall y1.((\neg P(x,y1) \wedge \neg Q(x,z)) \vee (P(x,y2) \wedge R(y2)))$$

Skolemform $[f(x)/y2; g(x)/z]$**; in CNF bringen**

$$=(\neg P(x,y1) \wedge \neg Q(x,g(x))) \vee (P(x,f(x)) \wedge R(f(x)))$$

$$\begin{aligned}
=&(\neg P(x,y1) \vee P(x,f(x))) \wedge (\neg P(x,y1) \vee R(f(x)))\\
&\wedge (\neg Q(x,g(x)) \vee P(x,f(x))) \wedge (\neg Q(x,g(x)) \vee R(f(x)))
\end{aligned}$$

Klauselform

$$\{\neg P(x,y1) \vee P(x,f(x))\}; \{\neg P(x,y1); R(f(x))\};$$
$$\{\neg Q(x,g(x)) \vee P(x,f(x))\}; \{\neg Q(x,g(x)) \vee R(f(x))\}$$

5.d WS 17/18

$$\exists x.\forall y.(P(x,y) \to \forall z.(Q(z) \to R(z,y))) \to \exists y.(Q(y))$$

NNF

$$\begin{aligned}
&\neg\exists x.\forall y.(P(x,y) \to \forall z.(Q(z) \to R(z,y))) \lor \exists y.(Q(y))\\
=&\exists y.(Q(y)) \lor \forall x.\exists y.\neg(P(x,y) \to \forall z.(Q(z) \to R(z,y)))\\
=&\exists y.(Q(y)) \lor \forall x.\exists y.\neg(\neg P(x,y) \lor \forall z.(\neg Q(z) \lor R(z,y)))\\
=&\exists y.(Q(y)) \lor \forall x.\exists y.(P(x,y) \land \neg\forall z.(\neg Q(z) \lor R(z,y)))\\
=&\exists y.(Q(y)) \lor \forall x.\exists y.(P(x,y) \land \exists z(Q(z) \land \neg R(z,y)))\\
=&\exists y.(Q(y)) \lor \forall x.\exists b.(P(x,b) \land \exists z(Q(z) \land \neg R(z,b)))
\end{aligned}$$

Pränexe Normalform

$$\exists y.\forall x.\exists b.\exists z.(Q(y) \lor (P(x,b) \land Q(z) \land \neg R(z,b)))$$

Skolemform $[a/y; f(x)/b; g(x)/z]$

$$\forall x.(Q(a) \lor (P(x,f(x)) \land Q(g(x)) \land \neg R(g(x),f(x)))$$

CNF

$$\forall x.((Q(a) \lor P(x,f(x))) \land (Q(a) \lor Q(g(x))) \land (Q(a) \lor \neg R(g(x),f(x))))$$

Klauselform

$$\{Q(a); P(x,f(x))\}; \{Q(a); Q(g(x))\}; \{Q(a); \neg R(g(x),f(x))\}$$

5.e WS 16/17

$$\forall x.(\forall y.(R(x,y) \to R(y,x)) \to \exists z.(P(x,z) \lor Q(z)))$$

NNF

$$\begin{aligned}
&\forall x.(\neg\forall y.(\neg R(x,y) \lor R(y,x)) \lor \exists z.(P(x,z) \lor Q(z)))\\
=&\forall x.(\exists y.(R(x,y) \land \neg R(y,x)) \lor \exists z.(P(x,z) \lor Q(z)))
\end{aligned}$$

Pränexe Normalform

$$\forall x\exists y\exists z((R(x,y) \land \neg R(y,x)) \lor (P(x,z) \lor Q(z)))$$

Skolemform $[f(x)/y; g(x)/z]$

$$\forall x.((R(x,f(x)) \land \neg R(f(x),x)) \lor (P(x,g(x)) \lor Q(g(x))))$$

CNF

$$\forall x.(R(x, f(x)) \vee P(x, g(x)) \vee Q(g(x))) \wedge (\neg R(f(x), x) \vee P(x, g(x)) \vee Q(g(x)))$$

Klauselform

$$\{R(x, f(x)); P(x, g(x)); Q(g(x))\}; \{\neg R(f(x), x); P(x, g(x)); Q(g(x))\}$$

5.f WS 14/15

$$\forall x.((\forall y.(R(x, y)) \vee \exists y.(R(y, x))) \to \exists z.(S(x, z) \wedge S(z, x)))$$

NNF (+Umbenennung)

$$\begin{aligned} &\forall x(\neg(\forall y(R(x, y)) \vee \exists a(R(a, x))) \vee \exists z(S(x, z) \wedge S(z, x))) \\ =&\forall x((\exists y(\neg R(x, y)) \wedge \forall a(\neg R(a, x))) \vee \exists z(S(x, z) \wedge S(z, x))) \end{aligned}$$

Umstellen

$$\forall x(\exists z(S(x, z) \wedge S(z, x)) \vee (\exists y(\neg R(x, y)) \wedge \forall a(\neg R(a, x)))$$

Pränexe Normalform

$$\forall x \exists z \exists y \forall a((S(x, z) \wedge S(z, x)) \vee (\neg R(x, y) \wedge \neg R(a, x)))$$

Skolemform $[f(x)/z; g(x)/y]$

$$\forall x \forall a((S(x, f(x)) \wedge S(f(x), x)) \vee (\neg R(x, g(x)) \wedge \neg R(a, x)))$$

CNF

$$\begin{aligned} &\forall x \forall a.(S(x, f(x)) \vee \neg R(a, x)) \wedge (S(f(x), x) \vee \neg R(a, x)) \\ &\wedge (S(f(x), x) \vee \neg R(x, g(x))) \wedge (S(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))) \end{aligned}$$

Klauselform

$$\begin{gathered} \{S(x, f(x)); \neg R(a, x)\}; \{S(f(x), x); \neg R(a, x)\}; \\ \{S(f(x), x); \neg R(x, g(x))\}; \{S(x, f(x)); \neg R(x, g(x))\} \end{gathered}$$

6 Resolution durchführen

Konstanten dürfen nicht ersetzt werden, aber Variablen durch Konstanten. Das Ergebnis der Resolution ist immer die leere Klausel, da das Verfahren sonst nicht terminiert. Vor Anwendung der Resolutionsregel kann man erst die Variablen in den ursprünglichen Klauseln so umbenennen, dass die Klauseln disjunkte Variablenmengen haben!

6.a WS 20/21

a Konstante.

$$(1)\{P(f(x))\};(2)\{R(x,f(x))\};(3)\{\neg P(x),R(x,a)\};$$
$$(4)\{\neg R(x,y),\neg R(y,z),R(x,z)\};(5)\{\neg R(x,x)\}$$

$(6)\{\neg R(f(x),z);R(x,z)\}$ aus (2) und (4) mit $mgu=[f(x)/y]$

$(7)\{\neg R(f(z),z)\}$ aus (5) und (6) mit $mgu=[z/x]$

$(8)\{\neg P(f(a))\}$ aus (3) und (7) mit $mgu=[a/z,f(a)/x]$

$(9)\{\}$ aus (1) und (8) mit $mgu=[a/x]$

Klauselmenge unerfüllbar.

6.b WS 19/20

a Konstante.

$$(1)\{\neg R(x,y),\neg R(x,z),R(y,z)\};(2)\{R(x,x)\};(3)\{R(x,f(x))\};$$
$$(4)\{P(f(x))\};(5)\{\neg R(x,a),\neg P(x)\}$$

$(6)\{\neg R(x,y),R(y,x)\}$ aus (1) und (2) mit $mgu=[x/z]$

$(7)\{R(f(x),x)\}$ aus (6) und (3) mit $mgu=[f(x)/y]$

$(8)\{P(f(x'))\}$ Umbennenung von (4) mit $mgu=[x'/x]$

$(9)\{\neg R(f(x),a)\}$ aus (8) und (5) mit $mgu=[a/x',f(a)/x]$

$(10)\{\}$ aus (7) und (9) mit $mgu=[a/x]$

Klauselmenge unerfüllbar.

6.c WS 18/19

a Konstante.

$(1)\{S(x, f(x))\}; (2)\{\neg S(x, y), \neg S(y, z), R(x, z)\};$
$(3)\{\neg P(x), \neg R(x, y), P(y)\}; (4)\{P(a)\}; (5)\{\neg P(f(f(a)))\}$
Umbenennung:
$(1')\{S(x', f(x'))\}$

$(6)\{\neg S(x, x'), R(x, f(x'))\}$ aus (1) und (2) mit $mgu = [x'/y, f(x')/z]$
$(7)\{R(x, f(f(x)))\}$ aus (1) und (6) mit $mgu = [f(x)/x']$
$(8)\{\neg P(x), P(f(f(x)))\}$ aus (3) und (7) mit $mgu = [f(f(x))/y]$
$(9)\{\neg P(a)\}$ aus (5) und (8) mit $mgu = [a/x]$
$(10)\{\}$ aus (4) und (9)

Klauselmenge unerfüllbar.

6.d WS 17/18

a Konstante.

$(1)\{P(x, f(x))\}; (2)\{\neg P(x, y), P(y, x)\}; (3)\{\neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z)\}; (4)\{\neg P(a, a)\}$

$(5)\{\neg P(x, y), P(x, x)\}$ aus (2) und (3) mit $mgu = [x/z]$
$(6)\{P(x, x)\}$ aus (1) und (5) mit $mgu = [f(x)/y]$
$(7)\{\}$ aus (4) und (7) mit $mgu = [a/x]$

Klauselmenge unerfüllbar.

6.e WS 16/17

a Konstante.

$(1)\{R(x, f(x))\}; (2)\{P(f(x))\}; (3)\{\neg P(x), \neg S(x, y), Q(y)\}$
$(4)\{\neg R(x, y), \neg P(y), S(y, x)\}; (5)\{\neg Q(a)\}$

$(6)\{\neg P(x), \neg S(x, a)\}$ aus (3) und (5) mit $mgu = [a/y]$
$(7)\{\neg R(x, f(x)), S(f(x), x)\}$ aus (2) und (4) mit $mgu = [f(x)/y]$
$(8)\{S(f(x), x)\}$ aus (1) und (7)
$(9)\{\neg P(f(a))\}$ aus (6) und (8) mit $mgu = [f(a)/x, a/x']$
$(10)\{\}$ aus (2) und (9) mit $mgu = [a/x]$

Für Klausel (9) benötigt man eine Umbenennung von Klausel (8) mit $mgu = [x'/x]$. Klauselmenge unerfüllbar.

6.f 14/15

a, c Konstanten.

$$(1)\{\neg R(x,y), \neg R(y,z), R(x,z)\}; (2)\{R(x, f(g(x)))\}; (3)\{R(f(x),a)\}; (4)\{\neg R(c,a)\}$$

$(5)\{\neg R(f(g(x)),z), R(x,z)\}$ aus (1) und (2) mit $mgu = [f(g(x))/y]$
$(6)\{\neg R(f(g(c)),a)\}$ aus (4) und (5) mit $mgu = [a/z, c/x]$
$(7)\{\}$ aus (3) und (6) mit $mgu = [g(c)/x]$

Klauselmenge unerfüllbar.

7 Fitch

7.a WS 20/21

Formale Herleitung der Formel

$$\exists y \forall x (P(x) \to \neg R(y, x))$$

aus den Annahmen

$$\begin{aligned}
&\exists y \forall x (P(x) \to R(x, y)) \\
&\forall x (\neg R(x, x)) \\
&\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))
\end{aligned}$$

im System natürlichen Schließens:

1	$\exists y \forall x (P(x) \to R(x, y))$	
2	$\forall x (\neg R(x, x))$	
3	$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))$	
4	$\quad c, \forall x (P(x) \to R(x, c))$	
5	$\quad\quad d$	
6	$\quad\quad\quad P(d)$	
7	$\quad\quad\quad\quad R(c, d)$	
8	$\quad\quad\quad\quad P(d) \to R(d, c)$	$\forall$ E(4) [d/x]
9	$\quad\quad\quad\quad R(d, c)$	$\to$ E(6,8)
10	$\quad\quad\quad\quad R(c, d) \land R(d, c)$	$\land$ I(7,9)
11	$\quad\quad\quad\quad R(c, d) \land R(d, c) \to R(c, c)$	$\forall$ E(3)(3x) [c/x,d/y,c/z]
12	$\quad\quad\quad\quad R(c, c)$	$\to$ E(10,11)
13	$\quad\quad\quad\quad \neg R(c, c)$	$\forall$ E(2) [c/x]
14	$\quad\quad\quad\quad \bot$	$\bot$I(12,13)
15	$\quad\quad\quad \neg R(c, d)$	$\neg$ I(7-14)
16	$\quad\quad P(d) \to \neg R(c, d)$	$\to$ I(6-15)
17	$\quad \forall x (P(x) \to \neg R(c, x))$	$\forall$ I(5-16)
18	$\quad \exists y \forall x (P(x) \to \neg R(y, x))$	$\exists$ I(17)
19	$\exists y \forall x (P(x) \to \neg R(y, x))$	$\exists$ E(1,4-18)

7.b WS 19/20

Formale Herleitung der Formel

$$\forall x.\ \exists y.\ R(y,x) \wedge P(y)$$

aus den Annahmen

$$\begin{aligned}&\forall x,y,z.\ (R(x,y) \wedge R(x,z)) \to R(y,z)\\ &\forall x.\ R(x,x)\\ &\forall x.\ \exists y.\ R(x,y) \wedge P(y)\end{aligned}$$

im System natürlichen Schließens:

1	$\forall x,y,z.\ (R(x,y) \wedge R(x,z)) \to R(y,z)$	
2	$\forall x.\ R(x,x)$	
3	$\forall x.\ \exists y.\ R(x,y) \wedge P(y)$	
4	$\quad \boxed{c}$	
5	$\quad \exists y.\ R(\boxed{c},y) \wedge P(y)$	$(\forall\ \mathrm{E})$ 3,4
6	$\quad\quad \boxed{d} \quad R(\boxed{c},\boxed{d}) \wedge P(\boxed{d})$	
7	$\quad\quad \forall y,z.\ (R(\boxed{c},y) \wedge R(\boxed{c},z)) \to R(y,z)$	$(\forall\ \mathrm{E})$ 1,4
8	$\quad\quad \forall z.\ (R(\boxed{c},\boxed{d}) \wedge R(\boxed{c},z)) \to R(\boxed{d},z)$	$(\forall\ \mathrm{E})$ 6,7
9	$\quad\quad (R(\boxed{c},\boxed{d}) \wedge R(\boxed{c},\boxed{c})) \to R(\boxed{d},\boxed{c})$	$(\forall\ \mathrm{E})$ 4,8
10	$\quad\quad R(\boxed{c},\boxed{d})$	$(\wedge\ \mathrm{E})$ 6
11	$\quad\quad P(\boxed{d})$	$(\wedge\ \mathrm{E})$ 6
12	$\quad\quad R(\boxed{c},\boxed{c})$	$(\forall\ \mathrm{E})$ 2,4
13	$\quad\quad R(\boxed{c},\boxed{d}) \wedge R(\boxed{c},\boxed{c})$	$(\wedge\ \mathrm{I})$ 10,12
14	$\quad\quad R(\boxed{d},\boxed{c})$	$(\to\ \mathrm{E})$ 9,13
15	$\quad\quad R(\boxed{d},\boxed{c}) \wedge P(\boxed{d})$	$(\wedge\ \mathrm{I})$ 11,14
16	$\quad\quad \exists y.\ R(y,\boxed{c}) \wedge P(y)$	$(\exists\ \mathrm{I})$ 15
17	$\quad \exists y.\ R(y,\boxed{c}) \wedge P(y)$	$(\exists\ \mathrm{E})$ 6-16
18	$\forall x.\ \exists y.\ R(y,x) \wedge P(y)$	$(\forall\ \mathrm{I})$ 4-17

7.c WS 18/19

Formale Herleitung der Formel

$$\forall x \forall y (R(x,y) \to P(y))$$

aus den Annahmen

$$\forall x \forall y (S(x,y) \to P(y))$$
$$\forall x \forall y (R(x,y) \to \exists z (S(z,y)))$$

im System natürlichen Schließens:

1	$\forall x \forall y (S(x,y) \to P(y))$	
2	$\forall x \forall y (R(x,y) \to \exists z (S(z,y)))$	
3	a	
4	b	
5	$R(a,b) \to \exists z (S(z,b))$	(∀E) 2 [a/x,b/y]
6	$R(a,b)$	
7	$\exists z (S(z,b))$	(→E) 5,6
8	$c, S(c,b)$	
9	$S(c,b) \to P(b)$	(∀E) 1 [c/x, b/y]
10	$P(b)$	(→E) 8,9
11	$P(b)$	(∃E) 7,8-10
12	$R(a,b) \to P(b)$	(→I) 6-11
13	$\forall y (R(a,y) \to P(y))$	(∀I) 4-12
14	$\forall x \forall y (R(x,y) \to P(y))$	(∀I) 3-13

7.d WS 17/18

Formale Herleitung der Formel

$$\forall x(R(x,x))$$

aus den Annahmen

$$\begin{aligned}&\forall x \exists y(R(x,y))\\&\forall x,y,z((R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z))\\&\forall x,y(R(x,y)\to R(y,x))\end{aligned}$$

im System natürlichen Schließens:

1	$\forall x \exists y(R(x,y))$	
2	$\forall x,y,z((R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z))$	
3	$\forall x,y(R(x,y)\to R(y,x))$	
4	$\quad a$	
5	$\quad \exists y(R(a,y))$	$(\forall$E) 1
6	$\quad\quad b, R(a,b)$	
7	$\quad\quad R(a,b)$	
8	$\quad\quad \forall y(R(a,y)\to R(y,a))$	$(\forall$E) 3
9	$\quad\quad R(a,b)\to R(b,a)$	$(\forall$E) 8
10	$\quad\quad R(b,a)$	$(\to$E) 9,7
11	$\quad\quad R(a,b)\wedge R(b,a)$	$(\wedge$I) 7,10
12	$\quad\quad \forall y,z((R(a,y)\wedge R(y,a))\to R(a,z))$	$(\forall$E) 2
13	$\quad\quad \forall z((R(a,b)\wedge R(b,a))\to R(a,z))$	$(\forall$E) 12
14	$\quad\quad (R(a,b)\wedge R(b,a))\to R(a,a)$	$(\forall$E) 13
15	$\quad\quad R(a,a)$	$(\to$E) 14,11
16	$\quad R(a,a)$	$(\exists$E) 5,6-15
17	$\forall x(R(x,x))$	$(\forall$I) 4-16

WS 16/17 gleiche Aufgabe

7.e WS 15/16

Formale Herleitung der Formel

$$\forall x \exists y (P(x,y)) \vee (\exists y (P(y,x)))$$

aus den Annahmen

$$\forall x \exists y (P(x,y) \vee P(y,x))$$

1	$\forall x \exists y (P(x,y) \vee P(y,x))$	
2	c	
3	$\exists y (P(c,y) \vee P(y,x))$	($\forall$ E)1
4	$d, P(c,d) \vee P(d,c)$	
5	$P(c,d)$	
6	$\exists y (P(c,y))$	($\exists$ I) 5
7	$\exists y.(P(c,y)) \vee \exists y.P(y,c)$	($\vee$ I) 6
8	$P(d,c)$	
9	$\exists y (P(y,c))$	($\exists$ I)8
10	$\exists y (P(c,y)) \vee \exists y.P(y,c)$	
11	$\exists y (P(c,y)) \vee \exists y.P(y,c)$	($\vee$ E)4,5-7,8-10,
12	$\exists y (P(c,y)) \vee (\exists y (P(y,c)))$	($\exists$ I)
13	$\forall x \exists y (P(x,y)) \vee (\exists y (P(y,x)))$	($\forall$ I)2-12

7.f WS 14/15

Formale Herleitung der Formel

$$\exists x(\forall y(P(x,y))) \to \forall y(\exists x(P(x,y)))$$

1	$\vert$	
2	$\vert\;\vert\;\exists x(\forall y(P(x,y)))$	
3	$\vert\;\vert\;\vert\;c, \forall y(P(c,y))$	
4	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;d$	
5	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;P(c,d)$	$(\forall$ E)3
6	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\exists x(P(x,d))$	$(\exists$ I)5
7	$\vert\;\vert\;\vert\;\forall y(\exists x(P(x,y)))$	$(\forall$ I)4-6
8	$\vert\;\vert\;\forall y(\exists x(P(x,y)))$	$(\exists$ E)3-7
9	$\vert\;\exists x(\forall y(P(x,y))) \to \forall y(\exists x(P(x,y)))$	

7.g WS 14/15 (2)

$\forall x.\ (\exists y.\ P(x,y)) \lor (\exists y.\ P(y,x))$ aus $\forall x.\ \exists y.\ P(x,y) \lor P(y,x)$

1	$\vert\;\forall x.\ \exists y.\ P(x,y) \lor P(y,x)$	
2	$\vert\;\vert\;\boxed{c}$	
3	$\vert\;\vert\;\exists y.\ P(\boxed{c},y) \lor P(y,\boxed{c})$	$(\forall$ E) 1,2
4	$\vert\;\vert\;\vert\;\boxed{d}\quad P(\boxed{c},\boxed{d}) \lor P(\boxed{d},\boxed{c})$	
5	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;P(\boxed{c}\boxed{d})$	
6	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\exists y.\ P(\boxed{c},y)$	$(\exists$ I) 5
7	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\exists y.\ P(\boxed{c},y) \lor \exists y.\ P(y,\boxed{c})$	$(\lor$ I) 6
8	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;P(\boxed{d},\boxed{c})$	
9	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\exists y.\ P(y,\boxed{c})$	$(\exists$ E) 8
10	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\exists y.\ P(\boxed{c},y) \lor \exists y.\ P(y,\boxed{c})$	$(\lor$ I) 9
11	$\vert\;\vert\;\vert\;\exists y.\ P(\boxed{c},y) \lor \exists y.\ P(y,\boxed{c})$	$(\lor$ E) 4-10
12	$\vert\;\vert\;\exists y.\ P(\boxed{c},y) \lor \exists y.\ P(y,\boxed{c})$	$(\exists$ E) 3-11
13	$\vert\;\forall x.\ (\exists y.\ P(x,y)) \lor (\exists y.\ P(y,x))$	$(\forall$ I) 2-12

7.h WS 13/14

Formale Herleitung der Formel

$$\forall y.\exists x.(p(y) \to q(x))) \to (\forall y.(p(y) \to \exists x.q(x)))$$

1		
2	$\forall y \exists x(p(y) \to q(x))$	
3	a	
4	$\exists x(p(a) \to q(x))$	$(\forall$E)2
5	$b, p(a) \to q(b)$	
6	$p(a)$	
7	$q(b)$	($\to$E,5,6)
8	$\exists x(q(x))$	($\exists$I,7)
9	$p(a) \to \exists x(q(x))$	($\to$I,6-8)
10	$p(a) \to \exists x.q(x)$	($\exists$E,4,5-9)
11	$\forall y(p(y) \to \exists x.q(x))$	($\forall$I,3-10)
12	$\forall y.\exists x.(p(y) \to q(x)) \to (\forall y.(p(y) \to \exists x.q(x)))$	($\to$ I)2-11

8 Induktion

8.a WS 20/21

Sei $\Sigma = \{or/2, true/0, false/0\}$, $M = \{\bot, \top\}$ mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}[\![true]\!] &= \top\\ \mathfrak{M}[\![false]\!] &= \bot\\ \mathfrak{M}[\![or]\!](x,y) &= x \vee y = \{\bot \text{ falls } x = y = \bot \text{ sonst} \top\}\end{aligned}$$

Zeige durch Induktion über E, dass für jeden Σ-Term E und jede Umgebung η in $\mathfrak{M}$ gilt: Wenn $\eta(x) = \top$ für mindestens eine freie Variable $x \in FV(E)$, dann $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \top$.

"*Wenn mehrere (freie) Variablen verodert werden und eine wahr ist, so ist die Veroderung wahr*"

$\not{Z}$: per Induktion über Terme $E ::= x|true|false|or(E,E)$
Für Term E und Umgebung η in $\mathfrak{M}$ gilt:

$$(\eta(x) = \top \text{ für ein } x \in FV(E)) \to \mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \top$$

IA:
Fall 1 $E = x$: $\eta(x) = \top$: dann $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \top$, Sukzedens erfüllt.
Fall 2 $E = x$: $\eta(x) = \bot$: dann Antezedens nicht erfüllt.
Fall 3 $E = false$, $E = true$: $FV(E) = \{\}$ somit Antezedens nicht erfüllt.

IV: Die zu zeigende Aussage (siehe oben) gelte für die Terme $E1$ und $E2$

IS:
$E = or(E1, E2) \to FV(E) = FV(E1) \cup FV(E2)$, angenommen für die Umgebung η gilt: $\eta(x) = \top$ für ein $x \in FV(E)$, x muss (nach Def. von $FV(E)$) in $FV(E1)$ oder $FV(E2)$ liegen, sonst $\forall x.x \in FV(E)\eta(x) = \bot$ Antezedens nicht erfüllt:
OBdA liegt x in $FV(E1)$ (für $FV(E2)$ identisch):
Nach IV gilt dann, dass $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta = \top$
$\not{Z}$:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \top\\ \Leftrightarrow&\mathfrak{M}[\![or(E1,E2)]\!]\eta = \top\\ \Leftrightarrow&\mathfrak{M}[\![or]\!]\eta(\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta, \mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta) = \top\\ \Leftrightarrow&\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta = \top \text{ oder } \mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta = \top\\ &\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta = \top \text{ gilt nach IV, also gilt auch } \mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \top\end{aligned}$$

8.b WS 19/20

Sei $\Sigma = \{true/0, false/0, xor/2\}$ und sei $\mathfrak{M}$ ein Σ-Modell mit $M = \{\top, \bot\}$

$$\mathfrak{M}[\![true]\!] = \top$$
$$\mathfrak{M}[\![false]\!] = \bot$$
$$\mathfrak{M}[\![xor]\!](x, y) = x \oplus y = \begin{cases} \bot & \text{falls } x = y \\ \top & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie die rekursive Definition von f auf geschlossenen Termen an (zur Erinnerung: ein Term E ist geschlossen, wenn $FV(E) = \emptyset$), sodass $f(E)$ die Anzahl der Vorkommen der Konstante *true* im geschlossenen Term E liefert.

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{falls } E = true \\ 0 & \text{falls } E = false \\ f(E_1) + f(E_2) & \text{falls } E = xor(E_1, E_2) \end{cases}$$

Zeigen Sie außerdem, dass für den geschlossenen Term E genau dann

$$\mathfrak{M}[\![E]\!] = \bot$$

gilt, wenn $f(E)$ gerade ist.
Die Aufgabe ist absichtlich einfacher gestellt, dafür wird mehr Wert auf Formalismen gelegt.

Ƶ:

$$\mathfrak{M}[\![E]\!] = \bot \longleftrightarrow f(E) \text{ ist gerade} \qquad (*)$$

$E, D ::= \{false \mid true \mid xor(E, D)\}$

I.A:
$E = false$; $\mathfrak{M}[\![false]\!] = \bot$; $f(false) = 0$ somit gerade
$\Rightarrow$ beide Seiten von $(*)$ gelten, somit gilt Äquivalenz $(*)$
$E = true$; $\mathfrak{M}[\![true]\!] = \top$; $f(true) = 1$ somit ungerade
$\Rightarrow$ beide Seiten von $(*)$ gelten nicht, somit gilt Äquivalenz $(*)$

I.V:
Für E_1, E_2 gelte $(*)$

I.S:
$E = xor(E_1, E_2)$

1. Falls $\mathfrak{M}[\![E_1]\!] = \bot$

(a) Falls $\mathfrak{M}[\![E_2]\!] = \bot$

Damit $\mathfrak{M}[\![xor(E_1, E_2)]\!] = \mathfrak{M}[\![xor]\!](\mathfrak{M}[\![E_1]\!], \mathfrak{M}[\![E_2]\!]) = \bot \oplus \bot = \bot$
müssen nach I.V. $f(E_1)$ gerade und $f(E_2)$ gerade sein, somit
$f(xor(E_1, E_2)) = f(E_1) + f(E_2) =$ "gerade"$+$ "gerade- "gerade"$\Rightarrow (*)$ gilt

(b) Falls $\mathfrak{M}[\![E_2]\!] = \top$

Damit $\mathfrak{M}[\![xor(E_1, E_2)]\!] = \mathfrak{M}[\![xor]\!](\mathfrak{M}[\![E_1]\!], \mathfrak{M}[\![E_2]\!]) = \bot \oplus \top = \top$
müssen nach I.V. $f(E_1)$ gerade und $f(E_2)$ ungerade sein, somit
$f(xor(E_1, E_2)) = f(E_1) + f(E_2) =$ "gerade"$+$ ügerade- ügerade"$\Rightarrow (*)$ gilt

2. Falls $\mathfrak{M}[\![E_1]\!] = \top$

(a) Falls $\mathfrak{M}[\![E_2]\!] = \bot$

Damit $\mathfrak{M}[\![xor(E_1, E_2)]\!] = \mathfrak{M}[\![xor]\!](\mathfrak{M}[\![E_1]\!], \mathfrak{M}[\![E_2]\!]) = \top \oplus \bot = \top$
müssen nach I.V. $f(E_1)$ ungerade und $f(E_2)$ gerade sein, somit
$f(xor(E_1, E_2)) = f(E_1) + f(E_2) =$ ügerade"$+$ "gerade- ügerade"$\Rightarrow (*)$ gilt

(b) Falls $\mathfrak{M}[\![E_2]\!] = \top$

Damit $\mathfrak{M}[\![xor(E_1, E_2)]\!] = \mathfrak{M}[\![xor]\!](\mathfrak{M}[\![E_1]\!], \mathfrak{M}[\![E_2]\!]) = \top \oplus \top = \top$
müssen nach I.V. $f(E_1)$ ungerade und $f(E_2)$ ungerade sein, somit
$f(xor(E_1, E_2)) = f(E_1) + f(E_2) =$ ügerade"$+$ ügerade- "gerade"$\Rightarrow (*)$ gilt

In jedem Fall gilt $(*)$ $\square$

8.c WS 18/19

Sei $\Sigma = \{xor/2\}$, $M = \{\bot, \top\}$ mit

$$\mathfrak{M}[\![xor]\!](m, n) = m \oplus n = \begin{cases} \bot \text{ falls } m = n \\ \top \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Anzahl der in einem Term E und einer Umgebung η vorkommenden Variablen mit dem Wahrheitswert $\top$ (unter η) ist definiert:

$$t_\eta(x) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } \eta(x) = \top \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$t_\eta(xor(E1, E2)) = t_\eta(E1) + t_\eta(E2)$$

Zeige durch Induktion über E, dass für jeden Σ-Term E und jede Umgebung η in $\mathfrak{M}$ gilt:

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \bot \longleftrightarrow t_\eta(E) \text{ gerade}$$

"Das XOR über eine gerade Anzahl an $\top$ (wahr) und beliebigen $\bot$ (falsch) ist falsch"; Durch Biimplikation gilt auch, dass wenn der Term über diesem Modell zu falsch ausgewertet wird, dann die Anzahl er vorkommenden $\top$ gerade sein muss.

IA: $E = x; \mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![x]\!]\eta$
1. Fall $\eta(x) = \bot$: $t_\eta(x) = t_\eta(\bot) = 0$ gerade; $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![x]\!]\eta = \bot$ *($\bot = \bot \leftrightarrow 0$ gerade)*
2. Fall $\eta(x) = \top$: $t_\eta(x) = t_\eta(\top) = 1$ gerade; $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![x]\!]\eta = \top$ *($\top = \bot \leftrightarrow 1$ gerade)*

IV: Die zu zeigende Aussage (siehe oben) gelte für die Terme $E1$ und $E2$

IS: $E = xor(E1, E2)$
1. Fall $t_\eta(E1)$ gerade und $t_\eta(E2)$ gerade:
$t_\eta(E) = t_\eta(E1) + t_\eta(E2)$ gerade. "*gerade + gerade = gerade*"

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![xor(E1, E2)]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![xor]\!](E1, E2) = E1 \oplus E2 \overset{\text{IV}}{=} \bot \oplus \bot = \bot$$
$$\bot = \bot \leftrightarrow \top \text{ da } t_\eta(E) \text{ gerade}$$

2. Fall $t_\eta(E1)$ ungerade und $t_\eta(E2)$ gerade:
$t_\eta(E) = t_\eta(E1) + t_\eta(E2)$ ungerade. "*ungerade + gerade = ungerade*"

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![xor(E1, E2)]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![xor]\!](E1, E2) = E1 \oplus E2 \overset{\text{IV}}{=} \top \oplus \bot = \top$$
$$\top = \bot \leftrightarrow \bot \text{ da } t_\eta(E) \text{ ungerade}$$

3. Fall $t_\eta(E1)$ gerade und $t_\eta(E2)$ ungerade:
$t_\eta(E) = t_\eta(E1) + t_\eta(E2)$ ungerade. "*gerade + ungerade = ungerade*"

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![xor(E1, E2)]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![xor]\!](E1, E2) = E1 \oplus E2 \overset{\text{IV}}{=} \bot \oplus \top = \top$$
$$\top = \bot \leftrightarrow \bot \text{ da } t_\eta(E) \text{ ungerade}$$

4. Fall $t_\eta(E1)$ ungerade und $t_\eta(E2)$ ungerade:
$t_\eta(E) = t_\eta(E1) + t_\eta(E2)$ gerade. "*ungerade + ungerade = gerade*"

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![xor(E1, E2)]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![xor]\!](E1, E2) = E1 \oplus E2 \overset{\text{IV}}{=} \top \oplus \top = \bot$$
$$\bot = \bot \leftrightarrow \top \text{ da } t_\eta(E) \text{ gerade}$$

8.d WS 17/18

Sei $\Sigma = \{or/2, and/2, false/0, true/0\}$, $M = \{\bot, \top\}$ mit

$$\mathfrak{M}[\![false]\!] = \bot$$
$$\mathfrak{M}[\![true]\!] = \top$$
$$\mathfrak{M}[\![or]\!](a,b) = \begin{cases} \bot \text{ falls } a = b = \bot \\ \top \text{ sonst} \end{cases}$$
$$\mathfrak{M}[\![and]\!](a,b) = \begin{cases} \top \text{ falls } a = b = \top \\ \bot \text{ sonst} \end{cases}$$

Zeige durch Induktion über E, dass für jeden Σ-Term E und jede Umgebung η in $\mathfrak{M}$ gilt:

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \top \rightarrow \mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \top] = \top$$

"*Wenn ein Term bestehend aus nur and oder or mit einer Variable auf false erfüllt ist, so auch mit dieser Variable auf true*"

IA:
Fall 1: $E = false$: $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \mathfrak{M}[\![false]\!] = \bot$, Antezedens nicht erfüllt.
Fall 2: $E = true$: $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \mathfrak{M}[\![true]\!] = \top$; $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \top] = \mathfrak{M}[\![true]\!] = \top$, Sukzedens erfüllt.
Fall 3: $E = x$: $\mathfrak{M}[\![x]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \bot$
Aussage erfüllt, da Antezedens der Aussage nicht erfüllt ist.

IV: Die zu zeigende Aussage (siehe oben) gelte für die Terme $E1$ und $E2$

IS:
$E = and(E1, E2)$:
Fall 1: $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \top$ und $\mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \top$ so gilt: $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \top$

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \top] = \mathfrak{M}[\![and]\!](\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta[x \mapsto \top], \mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta[x \mapsto \top]) \overset{\text{IV}}{=} \mathfrak{M}[\![and]\!](\top, \top) = \top$$

Fall 2: $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \bot$ oder $\mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \bot$ so gilt: $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \bot$
Antezedens nicht erfüllt, zu zeigende Aussage gilt.
$E = or(E1, E2)$:
Fall 1: $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \bot$ und $\mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \bot$ so gilt: $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \bot$
Antezedens nicht erfüllt, zu zeigende Aussage gilt.
Fall 2: $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \top$ oder $\mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \top$ so gilt: $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \bot] = \top$

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \top] = \mathfrak{M}[\![or]\!](\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta[x \mapsto \bot], \mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta[x \mapsto \top]) \overset{\text{IV}}{=} \mathfrak{M}[\![or]\!](\bot, \top) = \top$$
$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \top] = \mathfrak{M}[\![or]\!](\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta[x \mapsto \top], \mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta[x \mapsto \bot]) \overset{\text{IV}}{=} \mathfrak{M}[\![or]\!](\top, \bot) = \top$$
$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta[x \mapsto \top] = \mathfrak{M}[\![or]\!](\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta[x \mapsto \top], \mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta[x \mapsto \top]) \overset{\text{IV}}{=} \mathfrak{M}[\![or]\!](\top, \top) = \top$$

Alle Fälle sind erfüllt: Aussage gilt.

8.e WS 15/16

Sei $\Sigma = \{zero/0, one/0, mult/2\}$ und sei $\mathfrak{M}$ ein Σ-Modell mit $M = \mathbb{N}$

$$\mathfrak{M}[\![zero]\!] = 0$$
$$\mathfrak{M}[\![one]\!] = 1$$
$$\mathfrak{M}[\![mult]\!](x, y) = x \cdot y$$

Zeige durch Induktion über E, dass für jeden Σ-Term E und jede Umgebung η gilt:

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta \text{ gerade und ungleich } 0 \rightarrow \exists x \in FV(E).\eta(x) \text{ gerade}$$

"*Ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren welches gerade und ungleich 0 ist, hat als Faktor eine gerade Zahl*"
Annahme: Das Produkt von zwei ungeraden Zahlen ist ungerade. Das Produkt einer Zahl mit 0 ist immer 0. (Gilt, da dies durch die Eigenschaften der Multiplikation gegeben ist, die hier vermutlich vorausgesetzt wird, ansonsten Lösung bedeutend komplizierter)

IA:
$E = zero$: $\mathfrak{M}[\![zero]\!] = 0$ nicht ungleich 0: Antezedens nicht erfüllt, Implikation erfüllt.
$E = one$: $\mathfrak{M}[\![one]\!] = 1$ nicht gerade: Antezedens nicht erfüllt, Implikation erfüllt.
$E = x$: wenn $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta$ gerade und ungeleich 0, so auch $x \in FV(E) = \{x\}$ $\eta(x)$ gerade, da Term nur aus x besteht.

IV: Die zu zeigende Aussage (siehe oben) gelte für die Terme $E1$ und $E2$

IS:

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![mult(E1, E2)]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![mult]\!](E1, E2)\eta = (E1 \cdot E2)\eta = E1\eta \cdot E2\eta$$

Zusätzlich gilt (Eigenschaft über freie Variablen):

$$FV(E) = FV(E1) \cup FV(E2)$$

Fall 1: $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta$ oder $\mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta$ ist gerade und beide ungleich 0:
OBdA $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta$ gerade und ungeleich 0:
Nach IV gilt $\exists x \in FV(E1).\eta(x)$ gerade, da $FV(E1) \subset FV(E)$ gilt $x \in FV(E)$. Der Sukzedens der Implikation ist erfüllt, die Implikation ist erfüllt.
Fall 2: $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta$ und $\mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta$ ungerade und beide ungleich 0:
Nach Annahme ist dann $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta$ ungerade, Antezedens nicht erfüllt, Implikation erfüllt.
Fall 3: $\mathfrak{M}[\![E1]\!]\eta$ oder $\mathfrak{M}[\![E2]\!]\eta$ gleich 0:
Nach Annahme ist dann $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = 0$, der Antezedens ist nicht erfüllt, Implikation erfüllt.