Klausur Mathematik für Ingenieure C2, Bachelor **SoSe 2018**
(INF,IP,PhM,ILS) **Montag, 08.10.2018**
Prof. Dr. S. Kräutle **Dauer: 90 min**

A1) (Reihen)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{5^k} x^k \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{6k^2+k+1}{12k^2+5} \right)^k x^{4k}$$

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren/divergieren (kurze Begründung jeweils):

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{e^k} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^k}{k}$$

(2+2+1+1=6 Punkte)

A2) (Grenzwerte von Folgen und Funktionen)

a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4+4n^2+6n} - n^2 \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{6}{n}\right)^{2n}$$

b) Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \text{Für alle } \alpha,\beta \neq 0\text{: } \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1+\beta x}}{x} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)\cos(2x)}{e^{x^2}-1}$$

(2+2+2+3=9 Punkte)

A3) (Differenzenquotient, Ableiten von Funktionen mit 2 Argumenten)

a) Prüfen Sie unter Verwendung des Differenzenquotienten, ob die folgenden Funktionen an der Stelle $x=0$ differenzierbar sind:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x\cdot\sin(x)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

b) Sei $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^3\, e^{2y}\,.$$

(i) Berechnen Sie den Gradienten von f sowie die Hesse-Matrix von f.

(ii) An der Stelle $(x,y)=(1,1)$: Steigt oder fällt f in Richtung des Vektors $\vec{r} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$? (kurze Rechnung erforderlich)

(4+4=8 Punkte)

A4) (Integrale)

Berechnen Sie:

a)
$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{x}) + e^{-\sqrt{x}}\right) dx$$

b)
$$\int (1+\sqrt{x})(1+\ln x)\, dx$$

c)
$$\int_2^3 \frac{4}{(x-5)(x-1)}\, dx$$

(3+3+3=9 Punkte)

A5) (Taylor-Entwicklung)

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 2x + x^2 \ln x\,.$$

a) Stellen Sie für obige Funktion f zum Entwicklungspunkt $x_* = 1$ das Taylor-Polynom T_3 dritten Grades auf.

b) Geben Sie für das Taylor-Polynom T_3 aus a) das Restglied R_3 an.

c) Bestimmen Sie eine Schranke für das Restglied R_3 an der Stelle $x=3$. Diese Schranke soll die Form $|R_3(3)| \leq c$ haben, für ein zu findendes $c\in\mathbb{R}$.

d) Stellen Sie *für die Umkehrfunktion* von f zum Entwicklungspunkt $y_* = f(x_*) = f(1)$ das Taylor-Polynom $\tilde{T}_1$ ersten Grades auf.

(4+2+2+2=10 Punkte)

(Summe: 42 Punkte)