Prolog:
Nachfolgender Einschub ist nicht in der studentischen Mitschrift von 2016 zu finden. Das Thema „Konzentratoren" wurden ergänzend im Sommersemester 2017 behandelt. Für die Korrektheit gebe ich kein Gewähr! Der Beweis ist übernommen aus „Approximationsalgorithmen: Eine Einführung" (Wanka, 2007), Kapitel 7.

3.3 Konzentratoren

Definition 3.1. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, m, c \in \mathbb{N}, m$ gerade. Ein bipartiter Graph $G = (A \cupdot B, E)$ heißt (α, β, m, c)-Konzentrator, falls gilt:

(i) $|A| = m, |B| = \frac{m}{2}$

(ii) Knoten aus A haben max. Grad c, Knoten aus B haben max. Grad $2c$

(iii) Expansionseigenschaft: Für alle $X, X \subseteq A, |X| \leq \alpha \cdot m$ gilt: $|\Gamma(X)| \geq \beta \cdot |X|$
D.h.: Jede Knotenmenge aus A (bis zu einer bestimmten Größe) hat sehr viele Nachbarn. Wir sagen: A expandiert, β ist der Expansionsfaktor.

Wegen (iii) gilt: $\alpha \cdot \beta \leq \frac{1}{2}$, da sonst (i) verletzt wäre.

Satz 3.2. Für $\alpha \leq \frac{1}{2\beta} \cdot (4\beta \cdot e^{1+\beta})^{-\frac{1}{c-\beta-1}}$ gibt es (α, β, m, c)-Konzentratoren.

Beispiel. Für $\beta = 2$ und $c = 4$ muss gelten: $\alpha \leq \frac{1}{32e^3}$, also z.B. $\alpha = \frac{1}{643}$. Damit gibt es $(\frac{1}{643}, 2, m, 4)$-Konzentratoren für beliebig große m.

Beweis. Betrachte folgende Klasse $\mathcal{R}$ von bipartiten Graphen:

- $G = (A \cupdot B, E), A = \{0, ..., m-1\}, B = \{0, ..., \frac{m}{2} - 1\}$.
- Für eine beliebige Permutation $\pi : A \to A$ sei $E_\pi = \{(i,j) \in A \times B \mid \pi(i) = \{j, j + \frac{m}{2}\}\}$[1]
- Sei $\mathcal{R} = \{G = (A \cupdot B, E) \mid E = E_{\pi_1} \cup ... \cup E_{\pi_c}$ für bel. Permutationen $\pi_1, ..., \pi_c : A \to A\}$

Jeder Graph $G \in \mathcal{R}$ erfüllt (i) und (ii). Wir zeigen, dass es mind. einen Graphen $G \in \mathcal{R}$ gibt, so dass G (iii) erfüllt. Zufallsexperiment: Würfle zufällig, unabhängig c Permutationen $\pi_1, ..., \pi_c$, also „wir wählen zufällig einen Graphen aus $\mathcal{R}$ aus".

[1] z. B.: $\pi(i) = 7, (i, 3), \frac{m}{2} = 4$

Lemma 3.3. Sei G ein zufällig aus $\mathcal{R}$ gewählter Graph. Dann gilt:

$$\Pr[G \text{ ist kein } (\alpha,\beta,m,c)\text{-Konzentrator}] \lneq 1 \Rightarrow \text{Aussage des Satzes}$$

Beweis von Lemma 3.3. Seien o. B. d. A. β, μ nicht ganzzahlig

$$\begin{aligned}
&\Pr[G \text{ ist kein } (\alpha,\beta,m,c)\text{-Konzentrator}]\\
&\quad = \Pr[\exists X \subseteq A, |X| \leq \alpha \cdot m : |\Gamma(X)| < \beta \cdot |X|]\\
&\quad \leq \Pr[\exists \mu \leq \alpha \cdot m, \exists X \subseteq A, \exists Y \subseteq B : |X| = \mu, |Y| = \lfloor \beta \cdot \mu \rfloor \wedge \Gamma(X) \subseteq Y]\\
&\quad \leq \sum_{\mu=1}^{\alpha \cdot m} \sum_{\substack{X \subseteq A,\\ |X|=\mu}} \sum_{\substack{Y \subseteq B,\\ |Y|=\lfloor \beta\cdot\mu \rfloor}} \Pr[\Gamma(X) \subseteq Y]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr[\Gamma(X) \subseteq Y]\\
&\quad = \Pr[\bigwedge_{i=1}^{c} \pi_i(X) \subseteq Y \cup \{j + \tfrac{m}{2} \mid j \in Y\}]\\
&\quad = \prod_{i=1}^{c} \Pr[\pi_i(X) \subseteq Y \cup Y']\\
&\quad \leq \prod_{i=1}^{c} \frac{\mu! \cdot \binom{2\lfloor \beta\mu \rfloor}{\mu} \cdot (m-\mu)!}{m!}\\
&\quad \leq \prod_{i=1}^{c} \frac{2\cdot\beta\cdot\mu}{m} \cdot \frac{2\cdot\beta\cdot\mu - 1}{m-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2\cdot\beta\cdot\mu - \mu + 1}{m - \mu + 1}\\
&\quad < \prod_{i=1}^{c} \ldots = (\frac{2\beta\mu}{m})^{c\cdot\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^{\alpha \cdot m} \sum_{\substack{X \subseteq A,\\ |X|=\mu}} \sum_{\substack{Y \subseteq B,\\ |Y|=\lfloor \beta\cdot\mu \rfloor}} \left(\frac{2\beta\mu}{m}\right)^{c\cdot\mu}\\
&\quad \leq \sum_{\mu=1}^{\alpha\cdot m} \binom{m}{\mu} \cdot \binom{m/2}{\lfloor \beta \cdot \mu \rfloor} \cdot \left(\frac{2\beta\mu}{m}\right)^{c\cdot\mu} \qquad \text{wegen } \binom{k}{l} \leq \left(\frac{k}{e}\cdot e\right)^{l}\\
&\quad \leq \sum_{\mu=1}^{\alpha\cdot m} \left[\left(\tfrac{m}{\mu}\right)^{1+\beta-c} \cdot e^{1+\beta} \cdot (2\beta)^{c-\beta}\right]^{\mu}\\
&\quad < \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\alpha^{c-1-\beta} \cdot e^{1+\beta} \cdot (2\beta)^{c-\beta}\right)^{\mu} \leq 1 \qquad \text{für } r \leq \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

$r \leq \frac{1}{2}$ wegen der Voraussetzung im Satz an α und β. □

$\Rightarrow$ mit Lemma Satz 3.2 □

Einschub zu Korollar (Seite 11)

Korollar: Sei $h_{i,i}$ die erwartetet Zeit, die vergeht, um von i wieder nach i zurückzukehren. $h_{i,i} = \frac{1}{\pi_i} = \frac{2\cdot|E|}{d(i)}$.

Lemma: $h_{i,j} < 2 \cdot |E|$

Beweis: $\frac{2\cdot|E|}{d(j)} = h_{j,j} = \frac{1}{d(j)} \cdot \sum\limits_{k\in\Gamma(j)} (1 + h_{k,j}) \Rightarrow 2 \cdot |E| = \sum\limits_{k\in\Gamma(j)} (1 + h_{k,j}) > h_{i,j}$

Das $+1$ in der Summe ist ein Schritt von j zu einem beliebigen Nachbarn k. Anschließend werden $h_{k,j}$ Schritte benötigt, um (über Umwege) von k nach j zurückzukehren. Die Summe ist größer als $h_{i,j}$, da für einen speziellen Nachbarn i, auch das $h_{i,j}$ als positiver Summand auftauchen muss.

$\square$

Sei Z die Anzahl an Schritten, um von s nach t zu gelangen (Cover-Time):

$$\mathrm{E}[Z] < 4 \cdot |E| \cdot |V| \leq 4 \cdot n \cdot \binom{n}{2} \leq 2n^3 \text{ (mit Markov)}$$