
Alle Ergebnisse aus Vorlesung/Übung dürfen verwendet werden.

A1) (Extremwertaufgabe)

Wir betrachten die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^4 - x^3 + x^2y + y^2.$$

- a) Berechnen Sie alle stationären Punkte (=die kritischen Stellen) von f .
- b) (i) Berechnen Sie an allen stationären Punkten von f die Hesse-Matrix.
(ii) Wählen Sie einen der stationären Punkte aus. Entscheiden Sie, ob es sich bei dieser Stelle um eine lokale Maximalstelle oder lokale Minimalstelle handelt oder weder noch.
(Bemerkung: Begründung/Rechnung ist erforderlich.)

(4+4=8 Punkte)

A2) (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung)

Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Berechnen Sie das Maximum und das Minimum von f unter der Nebenbedingung

$$(x - y)^2 + 4(x + y)^2 = 16.$$

Hinweis: Ein *Vorschlag* zum Lösen des Lagrange-Gleichungssystems: Die erste Gleichung, die den Lagrange-Multiplikator enthält, mit y multiplizieren, die zweite Gleichung, die den Lagrange-Multiplikator enthält, mit x multiplizieren, und dann die Differenz betrachten.

(8 Punkte)

A3) (Kurvenintegrale)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \\ 3z \end{pmatrix}$$

und die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ mit der Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{1}{3}t^{3/2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 12.$$

- Berechnen Sie $\vec{\gamma}'(t)$.
- Berechnen Sie die Bogenlänge $|\Gamma|$ der Kurve.
- Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$I = \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{s}.$$

(1+4+4=9 Punkte)

A4) (nichtlineare und lineare Differentialgleichungen)

- Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1 + t^2}{2 + 2y}, \quad y(0) = 1.$$

- Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 7.$$

- Berechnen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 13y' = 0.$$

(4+3+3=10 Punkte)

**** **Bitte wenden** ****

A5) (Algebra)

a) Berechnen Sie folgende Multiplikativ-Inverse, *sofern sie existieren*:

$\alpha) \quad [5]_{124}^{-1}$

$\beta) \quad [10]_{25}^{-1}$

$\gamma) \quad [29]_{102}^{-1}$

$\delta) \quad [303]_{3003}^{-1}$

Bemerkung: Rechenweg im Falle der Existenz bzw. Begründung für Nichtexistenz jeweils angeben.

Hinweis: Bei einer der vier Aufgaben ist der Euklidische Divisionsalgorithmus empfehlenswert.

b) Wie viele Elemente hat die Gruppe \mathbb{Z}_{250}^* ?

c) Bestimmen Sie die vom Element $[2]_{17}$ erzeugte Untergruppe von \mathbb{Z}_{17}^* .

(6+2+2=10 Punkte)

(Summe: 45 Punkte)

Viel Erfolg!