Ing Math - C3, Lösung
01.10.2019

A1

a) $f(x,y) = x^4 - x^3 + x^2 y + y^2$

$$\rightsquigarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 3x^2 + 2xy \\ x^2 + 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow 2y = -x^2$, einsetzen

$$\rightsquigarrow 4x^3 - 3x^2 - x^3 = 0 \qquad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^3 - x^2}_{x^2 \cdot (x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 1$$

Kritische Stellen: $(0,0)$, $(1, -\frac{1}{2})$

b) (i) $$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 6x + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Hf(1, -\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Eigenwerte von $Hf(1,-\frac{1}{2})$:

$$p(\lambda) = (5-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} > 0$$

$$\underset{0}{\overset{\vee}{}}$$

$\Rightarrow$ Matrix ist positiv definit

$\Rightarrow$ $(1,-\frac{1}{2})$ ist lokale Minimalstelle

<u>Alternative:</u> $Hf(0,0)$ ist nur pos. semidefinit, daraus lässt sich nicht schließen, ob $(0,0)$ eine l.k. Minimalstelle ist oder nicht.

Aber man kann so argumentieren:

$$f(-\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 + \varepsilon^3 > 0 = f(0,0) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 - \varepsilon^3 = \varepsilon^3 \cdot (\varepsilon - 1) < 0 = f(0,0) \quad \forall \varepsilon \in (0,1)$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist weder l.k. Min.- noch Max.-Stelle

$\boxed{A2}$ $f(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x,y) := (x-y)^2 + 4(x+y)^2 - 16 \overset{!}{=} 0$

Lagrange-System: $\left[\begin{array}{l} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \lambda \cdot [2(x-y) + 8(x+y)] & | \cdot \frac{y}{2} \quad (1) \\ 2y = \lambda \cdot [-2(x-y) + 8(x+y)] & | \cdot \frac{x}{2} \quad (2) \\ (x-y)^2 + 4(x+y)^2 = 16 & \quad (3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = \lambda \cdot y \cdot (5x + 3y) \\ xy = \lambda \cdot x \cdot (3x + 5y) \\ (x-y)^2 + 4(x+y)^2 = 16 \end{array}\right.$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 = \lambda \cdot [y(5x+3y) - x(3x+5y)]$$
$$= \lambda \cdot (3y^2 - 3x^2)$$

1. Fall: $\lambda = 0 \overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} x = y = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} 0 = 16$ ↯

2. Fall: $x^2 = y^2$

Fall 2.1: $x = y \overset{(3)}{\Longrightarrow} 4 \cdot (2x)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$\rightsquigarrow$ Krit. Stellen $(1,1)$, $(-1,-1)$

Fall 2.2: $y = -x \overset{(3)}{\Longrightarrow} (2x)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\rightsquigarrow$ Krit. Stellen $(2,-2)$, $(-2,2)$

$f(\pm 1, \pm 1) = 2 =$ Min., angenommen bei $(1,1)$, $(-1,-1)$

$f(\pm 2, \pm 2) = 8 =$ Max., " " $(2,-2)$, $(-2,2)$

A3

a) $\vec{\gamma}\,'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

b) $|\Gamma| = \int_0^{12} \| \vec{\gamma}\,'(t) \| \, dt = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{1}{4} t} \, dt$

Subst. $u := 1 + \frac{1}{4} t \rightsquigarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{4}$

$t = 0 \rightsquigarrow u = 1$

$t = 12 \rightsquigarrow u = 4$

$= \int_1^4 4 u^{\frac{1}{2}} \, du = 4 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{8}{3} \cdot (8 - 1) = \underline{\underline{\frac{56}{3}}}$

c) $I = \int_0^{12} \langle \vec{V}(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma}\,'(t) \rangle \, dt$

$= \int_0^{12} \left\langle \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ -\sin t + \cos t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right\rangle dt$

$= \int_0^{12} \left[\cos^2 t + \cancel{\sin t \cos t} - \cancel{\sin t \cos t} + \sin^2 t + \frac{1}{2} t^2 \right] dt$

$= \int_0^{12} \left(1 + \frac{1}{2} t^2\right) dt = t + \frac{1}{6} t^3 \Big|_0^{12} = 12 + 2 \cdot 12^2$

$= 12 + 288 = \underline{\underline{300}}$

$\boxed{A4}$ a) $\displaystyle\int_{y_0}^{y(t)} (2+2y)\,dy = \int_{t_0}^{t} (1+\tau^2)\,d\tau$

$\Leftrightarrow \quad 2y + y^2 \Big|_1^{y(t)} = \tau + \frac{1}{3}\tau^3 \Big|_0^t$

$\Leftrightarrow \quad y(t)^2 + 2y(t) - 3 = t + \frac{1}{3}t^3 \qquad | +4$

$\Leftrightarrow \quad (y(t)+1)^2 = \frac{1}{3}t^3 + t + 4 \qquad | \sqrt{\;}$

$\Leftrightarrow \quad y(t) = (\pm) \sqrt{\frac{1}{3}t^3 + t + 4} - 1$

positive Wurzel wg. Anfangswert

b) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = 1$ (doppelt)

Also FS: $\{e^t, t\,e^t\}$

$y(t) = \alpha e^t + \beta t e^t$

$y'(t) = \alpha e^t + \beta (1+t) e^t$

$y(0) = \alpha \overset{!}{=} 5$

$y'(0) = \alpha + \beta \overset{!}{=} 7 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2$

$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{y(t) = (5+2t)e^t}}$

c) $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$

$\rightsquigarrow$ Komplexes FS: $\{1, e^{(2+3i)t}, e^{(2-3i)t}\}$

$\rightsquigarrow$ reelles FS: $\{1, e^{2t}\cos(3t), e^{2t}\sin(3t)\}$

A5

a) α) $5 \cdot 25 = 125 \equiv 1 \pmod{124}$

$\Rightarrow [5]_{124}^{-1} = [25]_{124}$

β) 10 und 25 haben gemeinsame Teiler
$\Rightarrow [10]_{25}^{-1}$ existiert nicht

β) $102 = \overbrace{3 \cdot 29}^{87} + 15$

$29 = 1 \cdot 15 + 14$

$15 = 1 \cdot 14 + 1$

$ggT(102, 29)$
$= ggT(29, 15)$
$= ggT(15, 14)$
$= 1$

$1 = 15 - 1 \cdot 14$

$= 15 - 1 \cdot (29 - 1 \cdot 15)$

$= 2 \cdot 15 - 1 \cdot 29$

$= 2 \cdot (102 - 3 \cdot 29) - 1 \cdot 29$

$= 2 \cdot 102 - 7 \cdot 29$

$\Rightarrow [1]_{102} = [-7]_{102} \cdot [29]_{102}$

$\Rightarrow [29]_{102}^{-1} = [-7]_{102} = [95]_{102}$

a) 303 und 3003 sind nicht teilerfremd
(beide durch 3 teilbar)
$\Rightarrow [303]_{3003}^{-1}$ existiert nicht

b) $250 = 2 \cdot 125 = 2 \cdot 5^3$
$\Rightarrow \phi(250) = (2-1) \cdot (5^3 - 5^2)$
$= \underline{\underline{100}}$

c) $\{ [1]_{17}, [2]_{17}, [4]_{17}, [8]_{17}, \overset{=-1}{[16]_{17}},$
$\overset{=-2}{[15]_{17}}, \overset{=-4}{[13]_{17}}, \overset{=-8}{[9]_{17}} \}$